微分幾何学講義

リーマン・フィンスラー幾何学入門

S. S. チャーン・W. H. チェン・K. S. ラム 共著
島田英夫・V. S. サバウ 共訳

Lectures on Differential Geometry

培風館

Lectures on Differential Geometry

by

S.S.Chern, W.H.Chen, K.S.Lam

序　文

本書は北京大学 (中華人民共和国) で行われた一連の微分幾何の入門講義に基づいて，1980 年に S.S. Chern (陳省身) 教授によりまとめられたものです．S.S. Chern 教授は，いうまでもなく微分幾何学の分野では高名なリーダーです．

本書のもとになった中国語のテキストは多くの数学者[1)]の努力によってまとめられ，北京大学の Wei-Huan Chen 氏によって最終的な形[2)]に整えられました．そのテキストの英語版は，まずパデュー大学の T.T. Moh 教授の指導により初稿がつくられ，Hung-Chieh Chang 氏が校正し，S.S. Chern 教授の指導のもとに私 (Kai.S.Lam) がまとめたものです．

この翻訳にあたっては，可能な限り S.S. Chern 教授の講義のスタイルおよび内容を保つことを心がけました．その特徴は簡明で直截的で饒舌を避けた説明，そして基本的な項目に対する深い考察です．本書は学部生や大学院生や微分幾何の物理への応用に関心のある物理学者等といった読者を対象としており，より専門的な研究のための総合的な知識を提供できると思われます．

大学における微分幾何学のカリキュラムにフィンスラー幾何学を採り入れる時期がようやくやってきたというのが S.S. Chern 教授の見解です．フィンスラー幾何学は，1854 年 Riemann の大学教員資格の就任講演の中に出てきます．そして 1900 年 Hilbert のパリ講演でも変分問題としてその重要性が示されました．1918 年の Finsler の学位論文以来 フィンスラー幾何学の研究は大きな発展をみましたが，リーマン幾何学における理論の一貫性のようなものがまだ欠けています．しかし最近の研究で，リーマン幾何学の出発点はもっと一般的であるフィンスラー幾何学の枠を考慮したほうがより自然であり，前者 (リーマン幾何学) における美しく深い結果は後者 (フィンスラー幾何学) の設定でも成り立つことが示されました．Chern 教授は 1940 年代に単独でその研究の道を拓き，そして David Bao 氏との最近の研究でそれを拡張しました．その内

容が少し長めではあるものの，Kai S. Lam と S.S. Chern による第 8 章「フィンスラー幾何学」として新しく追加されています．原文 (中国語) ではリーマン幾何学の完備性は第 5 章の最終節にありますが，本書ではそれはフィンスラー幾何学の完備性として完成され，§8-7 に集録されています．

Chern 教授は微分幾何学の分野を全体的に鳥瞰する興味深い付記 A「歴史的なメモ」を英語版のために特別に書き下ろしてくれました．付記 B の「微分幾何学と理論物理学」は，もともとは中国語で書かれて集録されていた Chern 教授の原稿 (中国語版) を私が英訳し，本書に初めて掲載したものです．本小論により数学者と物理学者との間に実りある議論がわき上がることを期待します．

Chern 教授は深い幾何学的な洞察と計算の巧みさの達人として知られています．それは本書に示された豊富な数学的スタイルにより証明されています．微分幾何学の大域的あるいは局所的な課題は等しく重要で興味深い，ということがこのテキストの中心テーマです．微分多様体の局所的な概念 (例えば局所座標系) が内在的な意味に欠けているかもしれませんが，例えばカルタン外微分形式やリッチテンソルの計算といった局所的な方法は，多様体の研究に非常に有効です．したがってこれらの方法は整備され，よく使われています．ただし，座標変換によって不変な性質をもつ内在的な対象，例えば接ベクトル場や微分形式やその他の重要性も指摘されています．このテキストでは多様体の局所的と大域的な性質との間の関連，例えばガウス–ボンネの定理 (第 5 章) やチャーン類 (第 7 章) が強調されています．

数学の専門家でない物理学者の私はこの場を借りて Chern 教授に謹んで感謝の意を表します．Chern 教授は数学者ではない私の無謀な試みを暖かく見守って下さったのみならず，数か月にもわたって親切な指導と応援をして下さいました．その上，先生は多大な迷惑を蒙りつつも，私に美しく魅了的なフィンスラー幾何学の世界を紹介してくれたのです．私は偉大な数学者 Chern 教授から教わり，共同研究をするというかけがえのない機会に出会い，大きく成長しました．フィンスラー幾何学に関する新しい章は Bao 教授と Chern 教授の共著論文「Houston Journal of Mathematics, Vol.19, No.1, 135–180 (1993)」と Bao, Chern, Shen 共著の統括的な出版物「An Introduction to Riemann–Finsler Geometry」(Springer-Verlag) に基づいたものです．上記の著書を参照させていただいたヒューストン大学の David Bao 教授，インディアナポリスのインディアナ大学–パデュー大学の Zhongmin Shen 教授，S.S. Chern 教授らに深謝致します．特に必要な参考資料や専門家としてのアドバイスをして下さり，

新しい章の構成に多大な援助をして下さったDavid Bao教授に感謝します．本文のフィンスラー幾何学の章は上記のBao, Chern, Shen教授の本を紹介したものですが，フィンスラー幾何学を深く理解したい読者には，この本の精読をお薦めします．

ご協力，ご支援を賜り，激励して下さった大学の同僚John Fang氏，Soumya Chakravarti氏，数理物理学者Martin Nakashima氏，数学者Bernard Banks氏とCharles Amelin氏に，L. Berwaldの初期の論文をドイツ語から英語に翻訳して下さった物理学者Barbara Hoeling博士に，また，このプロジェクト遂行に必要な時間と自由を与えて下さったカリフォルニア州立大学のサバティカルプロジェクトに心から感謝致します．さらに，翻訳の際に並々ならぬ情熱を注いでくれたHung-Chieh Chang氏とT.T. Moh氏，World Scientific社のHu Sen氏，Chen Wei氏，A.N. Kobayashi氏，S. H. Gan氏，そして，原稿の校正をユーモアとともに我慢し，LaTeXで入力して下さったGeoff Simms氏とAndres Cardenas氏に，最後に，終始支援し続けてくれた妻Bonnie J. Burattiと三人の息子Nathan, Reuben, Aaronに感謝致します．

Kai S. Lam
California State Polytechnic 大学，ポモナ校

1）この一連の講義は，北京大学のDuan Xue-Fu, Jiang Ze-Han, Wu Jiang-Lei, Wu Da-Ren教授らのご尽力とご支援のおかげで実現できました．特に，Wu Jiang-Lei, Wu Da-Ren, Tien Chow氏は，中国語版を読み，貴重なアドバイスをして下さいました．さらに，Jiang Xue-Cheng, You Cheng-Ye, Liu Wang-Jin, Han Nien-Guo, Zhou Zuo-Ling, Liu Ying-Ming, Sun Zhen-Zu, Li An-Min氏らは，ノートをとり，ティーチングアシスタントを務めてくれました．

2）*Lecture on Differential Geometry*, S.S. Chern, Wei-Huan Chen著，北京大学出版会，1983．この翻訳はこの出版物に基づいています．この本と同名，同内容の本がLien Ching Ch'u Pan Shih Yeh Co.出版社（台北，台湾）から1990年に中国語版の第2刷として出版されました．

目　　次

1

可微分多様体

§1-1　可微分多様体の定義

可微分多様体とはユークリッド空間の一般化である．簡単にいえば，多様体の任意の点がユークリッド空間の開集合と位相同形になる近傍をもつことである．したがって，任意の点の近傍に局所座標系を定義することができる．多様体とは，つまり，ユークリッド空間の細片を貼り合わせたものなのである．

記号 $\mathbb{R}$ で実数体を表す．

$$\mathbb{R}^m = \left\{ x = (x^1, \ldots, x^m) \,\middle|\, x^i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m \right\} \tag{1.1}$$

とおく．すなわち順序づけられた m 個の数の組の集合とする．実数 x^i は，点 $x \in \mathbb{R}^m$ の第 i 番目の**座標**とよばれる．任意の $x, y \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{cases} (x+y)^i = x^i + y^i, \\ \quad (ax)^i = ax^i \end{cases} \tag{1.2}$$

で $\mathbb{R}^m$ 上の加法とスカラー倍を定義する．これによって $\mathbb{R}^m$ は，$\mathbb{R}$ 上の m 次元ベクトル空間となる．

この線形構造以外に，$\mathbb{R}^m$ は標準的な位相構造ももっている．任意の点 $x, y \in \mathbb{R}^m$ に関して，$d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(x^i - y^i \right)^2} \tag{1.3}$$

で定義する．このとき関数 $d(x, y)$ は次の三つの条件をみたすことが容易に示される．

1) $d(x, y) \geq 0$,　ただし，等号は $x = y$ の場合に限る，

2) $d(x, y) = d(y, x)$,

3) 任意の点 $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ に対して，不等式 $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$ が成り立つ．

したがって，$d(x,y)$ は $\mathbb{R}^m$ 上の距離であり，$\mathbb{R}^m$ は距離空間となる．したがって，$\mathbb{R}^m$ は自然な位相構造をもつ[1]．ゆえに，開球 $B_{x,r} = \{y \in \mathbb{R}^m \,|d(x,y) < r\}$ $(x \in \mathbb{R}^m,\ r > 0)$ の和集合は開集合である．距離 (1.3) をもつ m 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ は，m 次元**ユークリッド空間**とよばれる．

関数 f を，開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された実数値関数としよう．関数 f のすべての k 階偏微分 $(k \leq r)$ が存在して連続であるとき，f は C^r 級であるといい，$f \in C^r(U)$ とかく．ここで r はある正の整数である．任意の正の整数 r に対して $f \in C^r(U)$ が成り立つとき，$f \in C^\infty(U)$ とかく．さらに，f が解析的である，すなわち f は U の各点の近傍で収束する級数で表すことができるとき，$f \in C^\omega(U)$ とかく．

定義 1.1 集合 M をハウスドルフ空間とする．任意の点 $x \in M$ に対して，$\mathbb{R}^m$ の開集合に位相同形である x の近傍 U が存在するとき，M を m 次元**多様体** (または m 次元**位相多様体**) とよぶ．

定義 1.1 の位相同形が $\varphi_U : U \longrightarrow \varphi_U(U)$ で表されるとき，(U, φ_U) を M の**座標系**とよぶ．ここで $\varphi_U(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．任意の点 $y \in U$ に対して写像 φ_U は位相同形なので，点 y の座標を $u = \varphi_U(y) \in \mathbb{R}^m$ の座標として定義することができる．すなわち，

$$u^i = (\varphi_U(y))^i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{1.4}$$

ここで，$u^i\,(i = 1, \ldots, m)$ は点 $y \in U$ の**局所座標**とよばれる．

(U, φ_U), (V, φ_V) を M の二つの座標系としよう．もし，$U \cap V \neq \varnothing$ ならば，$\varphi_U(U \cap V)$ と $\varphi_V(U \cap V)$ は空でない $\mathbb{R}^m$ の集合であり，写像

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}\Big|_{\varphi_U(U \cap V)} : \ \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V)$$

はこれら二つの開集合の間の位相同形を定義する．その逆写像は

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}\Big|_{\varphi_V(U \cap V)}$$

である．

1) 位相空間の基本的な概念に関しては，例えば，Munkres 1975 を参照のこと．

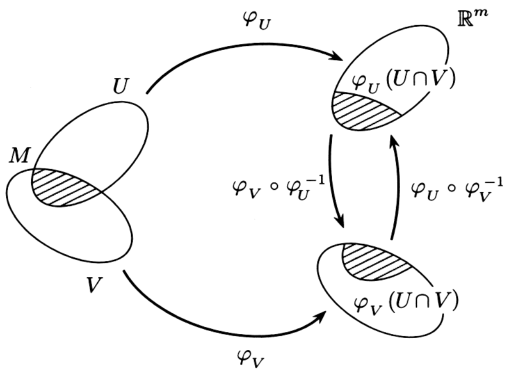


図 1

これらの二つは，ユークリッド空間の開集合間の写像である．座標で表すと，$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ と $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ はそれぞれユークリッド空間上の (図 1 参照) の開集合における m 次元実数値関数なので，

$$y^i = f^i\left(x^1,\ldots,x^m\right) = \left(\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}\left(x^1,\ldots,x^m\right)\right)^i, \qquad (1.5)$$

$$\left(x^1,\ldots,x^m\right)\in\varphi_U(U\cap V);$$

$$x^i = g^i\left(y^1,\ldots,y^m\right) = \left(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}\left(y^1,\ldots,y^m\right)\right)^i, \qquad (1.6)$$

$$\left(y^1,\ldots,y^m\right)\in\varphi_V(U\cap V)$$

とかける．また，$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ と $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ は互いに位相同形な逆写像なので，f^i と g^i は連続関数であり，

$$\begin{cases} f^i\left(g^1\left(y^1,\ldots,y^m\right),\cdots,g^m\left(y^1,\ldots,y^m\right)\right) = y^i, \\ g^i\left(f^1\left(x^1,\ldots,x^m\right),\cdots,f^m\left(x^1,\ldots,x^m\right)\right) = x^i \end{cases} \qquad (1.7)$$

が成り立つ．

もし関数 $f^i\left(x^1,\ldots,x^m\right)$ と $g^i\left(y^1,\ldots,y^m\right)$ が C^r 級のとき (ここで $U\cap V\neq\varnothing$)，座標系 (U,φ_U) と (V,φ_V) は C^r **両立**であるという．

定義 1.2 M を m 次元多様体とする．M 上の座標系の集合 $\mathcal{A}=\{(U,\varphi_U),(V,\varphi_V),(W,\varphi_W),\cdots\}$ が，

1) $\{U,V,W,\ldots\}$ は M の開被覆である，
2) 集合 $\mathcal{A}$ の任意の二つの座標系は C^r 両立である，

3) $\mathcal{A}$ は**極大**である．すなわち，座標系 $(\widetilde{U}, \varphi_{\widetilde{U}})$ が $\mathcal{A}$ のすべての座標系と C^r 両立ならば，$(\widetilde{U}, \varphi_{\widetilde{U}}) \in \mathcal{A}$,

をみたすとき，$\mathcal{A}$ を M の C^r **可微分構造**という．

M 上に C^r 可微分構造が入るとき，M を C^r **可微分多様体**という．与えられた可微分構造における座標系は，M の**許容座標系**とよばれる．今後，可微分多様体 M 上の 1 点 p の**局所座標系**は，p を含む許容座標系から得られる座標の意味であるとする．

注意 1. 定義 1.2 における条件 1) と 2) は重要である．集合 $\mathcal{A}'$ の座標系が条件 1) と 2) をみたせば，任意の正の整数 s $(0 < s \leq r)$ に対して $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ をみたすような C^s 可微分構造は $\mathcal{A}$ に一意に存在する．事実，$\mathcal{A}'$ におけるすべての座標系と C^s 両立であるすべての座標系の集合を $\mathcal{A}$ で表すと，その集合 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}'$ によって一意に決められる C^s 可微分構造である．したがって，可微分多様体をつくるには，許容座標系の被覆だけを選べばよい．

注意 2. 以後，多様体 M は第二可算公理をみたすと仮定する．すなわち，M は位相空間で，加算基底をもつ (p.2 の脚注を参照) とする．

注意 3. 多様体 M に C^∞ 可微分構造が与えられたとき，M を**滑らかな多様体**という．多様体 M に C^ω 可微分構造が与えられたとき，M を**解析多様体**という．本書では，主に滑らかな多様体に注目する．特に断らなければ，多様体というのは，滑らかな多様体という意味で使用する．

例 1. $M = \mathbb{R}^m$ の場合に，$U = M$ とし，写像 φ_U を恒等写像とする．このとき，$\{(U, \varphi_U)\}$ は $\mathbb{R}^m$ の被覆座標である．これは，$\mathbb{R}^m$ 上の滑らかな可微分構造を与える．これを $\mathbb{R}^m$ の**標準可微分構造**という．

例 2. m 次元単位球

$$S^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \,\middle|\, \left(x^1\right)^2 + \cdots + \left(x^{m+1}\right)^2 = 1 \right\}$$

を考える．$m = 1$ の場合，以下の 4 つを座標系としてとる．

$$\begin{cases} U_1 \left\{ x \in S^1 \,\middle|\, x^2 > 0 \right\}, & \varphi_{U_1}(x) = x^1, \\ U_2 \left\{ x \in S^1 \,\middle|\, x^2 < 0 \right\}, & \varphi_{U_2}(x) = x^1, \\ V_1 \left\{ x \in S^1 \,\middle|\, x^1 > 0 \right\}, & \varphi_{V_1}(x) = x^2, \\ V_2 \left\{ x \in S^1 \,\middle|\, x^1 < 0 \right\}, & \varphi_{V_2}(x) = x^2. \end{cases} \tag{1.8}$$

明らかに，$\{U_1, U_2, V_1, V_2\}$ は円 S^1 の開被覆である．積集合 $U_1 \cap V_2$ では，

$$\begin{cases} x^2 = \sqrt{1-(x^1)^2} > 0, \\ x^1 = -\sqrt{1-(x^2)^2} < 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

が成り立つ (図 2 参照)．これらは C^∞ 関数であるので，座標系 $\left(U_1, \varphi_{U_1}\right)$ と $\left(V_2, \varphi_{V_2}\right)$ は C^∞ 両立となる．同様に，任意の二つの座標系は C^∞ 両立となる．したがって，それらの座標系によって，S^1 は 1 次元可微分多様体となる．$m > 1$ の場合にも，同様に S^m 上に滑らかな構造を入れることができる．

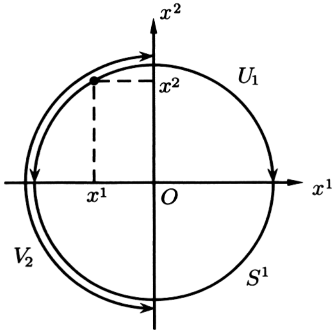


図 2

例 3. m 次元射影空間 P^m.　　$\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ に関係 $\sim$ を次のように定義する．任意の $x, y \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ に対して，$x \sim y$ となるための必要十分条件は，$x = ay$ となる定数 a が存在することである．このとき，明らかに $x \sim y$ は同値関係である．任意の $x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ に対して，x の同値類を

$$[x] = \left[x^1, \ldots, x^{m+1}\right]$$

とかく．

ここで，商空間

$$\begin{aligned} P^m &= \left(\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}\right)/\sim \\ &= \left\{[x] \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}\right\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

は m 次元射影空間である．$(m+1)$ 個の組 $\left(x^1, \ldots, x^{m+1}\right)$ を $[x]$ の**斉次座標**とよぶ．それらは 0 を除いた $[x]$ だけで決まる．したがって，射影空間 P^m は $\mathbb{R}^{m+1}$ の原点を通るすべての直線の空間である．

ここで，

$$\begin{cases} U_i = \left\{ \left[x^1, \ldots, x^{m+1}\right] \middle| \, x^i \neq 0 \right\}, \\ \varphi_i\left([x]\right) = \left({}_i\xi_1, \ldots, {}_i\xi_{i-1}, {}_i\xi_{i+1}, \ldots, {}_i\xi_{m+1} \right) \end{cases} \tag{1.11}$$

とおく．ただし，

$$1 \leq i \leq m+1, \qquad {}_i\xi_h = \frac{x^h}{x^i} \quad (h \neq i)$$

とする．明らかに $\{U_i, 1 \leq i \leq m+1\}$ は P^m の開被覆である．$U_i \cap U_j$ $(i \neq j)$ では，座標変換は

$$\begin{cases} {}_j\xi_h = \dfrac{{}_i\xi_h}{{}_i\xi_j}, & h \neq i, j; \\ {}_j\xi_i = \dfrac{1}{{}_i\xi_j} \end{cases} \tag{1.12}$$

で与えられる．したがって，$\{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq m+1}$ は P^m に滑らかな構造を定義する．

注意. 上記の各例の座標系は C^ω 両立でもある．したがって $\mathbb{R}^m$, S^m, P^m は解析多様体になる．

例 4 (ミルナーの異種球面)． 1 つの位相多様体に異なる複数の可微分構造が存在することもある．ちなみに，同相な位相多様体上に同形でない滑らかな構造が存在する，という有名な例を J. Milnor は示した (Milnor 1956)．(これに関して下記の定義 1.3 の注意を参照．) したがって，可微分構造は位相構造より多数ある．ミルナー球面の詳細な理解は本書の目的を越えるので，ここでは主なアイデアの概略に限ることにする．(なお，$\mathbb{R}^4$ 上には異なる複数の滑らかな構造が入るということが最近 S. K. Donaldson によって示された．(Donaldson, Kronheimer 1991 参照))

S^4 の対心点 A, B を選び，U_1 と U_2 を

$$U_1 = S^4 - \{A\}, \qquad U_2 = S^4 - \{B\} \tag{1.13}$$

とする．このとき，(U_1, U_2) は S^4 の開被覆となる．S^4 上の 3 次元球束 Σ^7 を得るために，自明球束 $U_1 \times S^3$ と $U_2 \times S^3$ を互いに貼り付けたい．

4 極射影を使うと U_1 と U_2 は $\mathbb{R}^4$ と互いに同相となり，積集合 $U_1 \cap U_2$ は $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ と同相である．$\mathbb{R}^4 - \{0\}$ の元を 4 元数とみなし，$\kappa^2 - 1 \not\equiv 0 \bmod 7$

となる奇数 κ 選ぼう．任意の $(u,v)\in\left(\mathbb{R}^4-\{0\}\right)\times S^3$ に対して，

$$\tau(u,v)=\left(\frac{u}{\|u\|^2},\frac{u^hvu^j}{\|u\|}\right) \tag{1.14}$$

となる写像 $\tau:\left(\mathbb{R}^4-\{0\}\right)\times S^3\longrightarrow\left(\mathbb{R}^4-\{0\}\right)\times S^3$ をとる．ここで

$$h=\frac{\kappa+1}{2},\qquad j=\frac{1-\kappa}{2} \tag{1.15}$$

であり，(1.14) の掛け算とノルム $\|\ \|$ は 4 元数での掛け算とノルムの意味である．明らかに τ は滑らかな写像である．この τ を用いて $U_1\times S^3$ と $U_2\times S^3$ を貼り付けることができる．このようにつくられた Σ^7 は 7 次元単位球 S^7 に同相であるが，その可微分構造は S^7 の標準微分構造と異なる (例 2).

滑らかな多様体上には滑らかな関数の概念が定義できる．f を m 次元の滑らかな多様体 M 上の実数値関数とする．p を M の元とし，(U,φ_U) を p を含む許容座標系とする．このとき $f\circ\varphi_U^{-1}$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の開部分集合 $\varphi_U(U)$ 上の実数値関数である．もし $f\circ\varphi_U^{-1}$ が $\varphi_U(p)\in\mathbb{R}^m$ の点で C^∞ であるならば，関数 f は点 $p\in M$ で C^∞ であるという．

点 p における関数 f の可微分性は p を含む許容座標系のとり方によらない．実際，p を含み，$U\cap V\neq\varnothing$ である他の許容座標系 (V,φ_V) をとれば，

$$f\circ\varphi_V^{-1}=\left(f\circ\varphi_U^{-1}\right)\circ\left(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}\right)$$

である．関数 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ は滑らかであるので，$f\circ\varphi_V^{-1}$ と $f\circ\varphi_U^{-1}$ は同じ点 p で微分可能である．

もし M のすべての点で f が C^∞ であるならば，f は M 上で C^∞(または滑らか) であるという．M 上のすべての滑らかな関数を $C^\infty(M)$ で表す．

滑らかな実数値関数は，滑らかな多様体の間の滑らかな写像の重要で特別な場合にあたるのである．

定義 1.3　写像 $f:M\longrightarrow N$ を滑らかな多様体 M と N の間の連続写像とし，$\dim M=m$，$\dim N=n$ とする．このとき，点 $p\in M$ と点 $f(p)\in N$ で両立[2)]する座標系 (U,φ_U)，(V,ψ_V) が存在し，次の写像

$$\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}:\varphi_U(U)\longrightarrow\psi_V(V)$$

2)　すなわち，これは多様体それぞれの滑らかな構造に含まれている．

が，点 $\varphi_U(p)$ で C^∞ ならば，その写像 f は p で C^∞ 写像であるという．もし，写像 f が M のすべての点 p で C^∞ ならば，f は多様体 M から N への**滑らかな写像**であるという．

注意. 写像 $\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ は，開集合 $\varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^m$ から他の開集合 $\psi_V(V) \subset \mathbb{R}^n$ への連続写像であるので，1 点 $\varphi_U(p)$ でその可微分性が定義される．明らかに 1 点 p での f の可微分性は両立する座標系 (U, φ_U) と (V, φ_V) のとり方にはよらない．

さらに，$\dim M = \dim N$ の場合，$f : M \longrightarrow N$ が同相で，f と f^{-1} がどちらも滑らかな写像ならば，$f : M \longrightarrow N$ は**微分同相写像**であるという．もし滑らかな多様体 M，N が微分同相のとき，その多様体の対応する滑らかな構造は**同形**であるという．上記の例で，ミルナー球面 Σ^7 は S^7 と位相同相であるが微分同相ではない．したがって，その滑らかな構造は同形ではない．

他の滑らかな多様体の間の滑らかな写像の重要で特別な場合として，開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ を M とすると，M 上の**パラメーター曲線**がある．$M = (a, b)$ から多様体 N への滑らかな写像 $f : (a, b) \longrightarrow N$ は N 上のパラメーター曲線である．

さて，M と N をそれぞれ可微分構造 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ と $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ をもつ m 次元多様体，n 次元多様体とする．このとき，下記の方法で滑らかな $(m+n)$ 次元多様体 $M \times N$ をつくることができる．

まず，$\{U_\alpha \times V_\beta\}_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}}$ は位相積空間 $M \times N$ の開被覆である．したがって，

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)), \qquad (p, q) \in U_\alpha \times V_\beta \tag{1.16}$$

となる写像 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ が定義できる．よって，$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ は $M \times N$ の座標系となる．この方法で得られたすべての座標系の集合は C^∞ 両立であることは容易に示すことができる．したがって，$M \times N$ 上の滑らかな可微分構造を定義する．

定義 1.4 位相積空間 $M \times N$ の許容座標被覆 $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}}$ によって決められる滑らかな可微分構造は，滑らかな $(m+n)$ 次元多様体を定義する．これを多様体 M と N の**積多様体**という．

積多様体 $M \times N$ から M, N への自然な射影を

$$\pi_1 : M \times N \longrightarrow M, \qquad \pi_2 : M \times N \longrightarrow N$$

とかく．ここで，任意の $(x,y) \in M \times N$ に対して

$$\pi_1(x,y) = x, \qquad \pi_2(x,y) = y$$

である．これらは明らかに滑らかな写像である．

§1-2　接 空 間

正則な曲線 (または曲面) の任意の点に対して接線 (または接平面) という概念がある．同様に，位相多様体上に可微分構造を与えると，任意の点の近傍は線形空間とみなすことができる．もっと精密にいうと，接空間と余接空間の概念を導入することができる．はじめに余接空間から定義しよう．

M を滑らかな m 次元多様体とする．1 点 $p \in M$ を固定し，p の近傍で定義される C^∞ 関数[3)] を f とする．C^∞ 関数の全体を C_p^∞ と表す．一般的には，C_p^∞ の 2 つの異なる関数の定義域は異なるが，関数空間 C_p^∞ に加法と積が定義可能である．関数 f, $g \in C_p^\infty$ の定義域をそれぞれ U, V とする．$U \cap V$ は p を含む近傍である．したがって，$f+g$ と $f \cdot g$ は $U \cap V$ 上の関数として定義することができる，すなわち $f+g$, $f \cdot g \in C_p^\infty$ となる．

C_p^∞ 上に関係 $\sim$ を以下のように定義する．関数 $f, g \in C_p^\infty$ に対して，$f \sim g$ であるための必要十分条件は，$f|_H = g|_H$ をみたすような点 p の開近傍 H が存在することである．明らかに $\sim$ は C_p^∞ 上の同値関係である．関数 f の同値類を $[f]$ とかき，M の点 p における C^∞ **芽**という．ここで，

$$\mathcal{F}_p = C_p^\infty / \sim = \left\{ [f] \,\middle|\, f \in C_p^\infty \right\} \tag{2.1}$$

とおく．このとき，加法とスカラー倍が定義されるので，$\mathcal{F}_p$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．ここで，$[f], [g] \in \mathcal{F}_p, a \in \mathbb{R}$ に対して，加法とスカラー倍は，

$$\begin{cases} [f] + [g] = [f+g], \\ \quad a[f] = [af] \end{cases} \tag{2.2}$$

で定義される．この定義において，(2.2) の右辺は $f \in [f]$ と $g \in [g]$ のとり方によらない．読者は $\mathcal{F}_p$ が無限次元実線形空間であることを確かめられたい．

---

3) f を開集合 $V \subset M$ 上の関数としよう．もし，関数 $f \circ \varphi_U^{-1}$ が，任意の許容座標系 (U, φ_U) に対して，開集合 $\varphi_U(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$ 上で C^∞ であるとき，f は V 上で C^∞ 関数という．ただし $U \cap V \neq \varnothing$ とする．実際に，V は M から誘導される可微分構造をもつ (§1-3 を参照)．したがって，f は可微分多様体 V 上の C^∞ 関数である．

さて，γ を，点 p を通る M 上のパラメーター曲線とする．したがって，$\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ は C^∞ 写像で，$\gamma(0) = p$ となるような正の実数 δ が存在する．これらすべてのパラメーター曲線の集合を Γ_p とする．

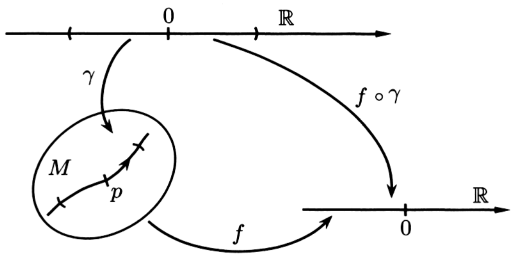


図 3

ここで，任意の $\gamma \in \Gamma_p$，$[f] \in \mathcal{F}_p$ に対して (図 3 参照)，

$$\ll \gamma, [f] \gg = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, \qquad -\delta < t < \delta \tag{2.3}$$

とおく．明らかに γ を固定すると，同値類 $[f]$ によって定まる上式の右辺の値は $f \in [f]$ のとり方によらない．さらに，$\ll\ ,\ \gg$ は第 2 番目の変数に関して線形である．すなわち，任意の $\gamma \in \Gamma_p$，$[f], [g] \in \mathcal{F}_p$，$a \in \mathbb{R}$ に関して

$$\ll \gamma, [f] + [g] \gg = \ll \gamma, [f] \gg + \ll \gamma, [g] \gg,$$
$$\ll \gamma, a[f] \gg = a \ll \gamma, [f] \gg \tag{2.4}$$

が成り立つ．

ここで

$$\mathcal{H}_p = \{[f] \in \mathcal{F}_p \mid \ll \gamma, [f] \gg = 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma_p\} \tag{2.5}$$

とおくと，$\mathcal{H}_p$ は $\mathcal{F}_p$ の線形部分空間になる．

定理 2.1 $[f] \in \mathcal{F}_p$ とし，許容座標系 (U, φ_U) に関して，

$$F\left(x^1, \ldots, x^m\right) = f \circ \varphi_U{}^{-1}\left(x^1, \ldots, x^m\right) \tag{2.6}$$

とおく．このとき，$[f] \in \mathcal{H}_p$ となるための必要十分条件は

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x^i} \right|_{\varphi_U(p)} = 0, \qquad 1 \leq i \leq m$$

である．

証明　$\gamma \in \Gamma_p$ とすると，座標表現で

$$\left(\varphi_U \circ \gamma(t)\right)^i = x^i(t), \qquad -\delta < t < \delta, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \ll \gamma, [f] \gg &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} F\left(x^1(t), \ldots, x^m(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{\varphi_U(p)} \cdot \frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0} \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

とかける．したがって，任意の実数値 $\frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}$ に対応する曲線 γ を選ぶことができるので，任意の $\gamma \in \Gamma_p$ に対して $\ll \gamma, [f] \gg = 0$ となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{\varphi_U(p)} = 0, \qquad 1 \leq i \leq m. \qquad \square$$

定理 2.1 は次のように要約できる．部分空間 $\mathcal{H}_p$ は，点 p での局所座標を用いると，その偏微分がすべて 0 となるような滑らかな関数の芽からつくられる線形空間そのものである．

定義 2.1　商空間 $\mathcal{F}_p/\mathcal{H}_p$ を p における M の**余接空間**とよび，T_p^* は (または $T_p^*(M)$) とかく．芽 $[f]$ の同値類を $\widetilde{[f]}$ または $(df)_p$ とかき，点 p における M の**余接ベクトル**という．

余接空間 T_p^* は線形空間であり，線形空間 $\mathcal{F}_p$ から誘導される線形構造をもつ．すなわち，任意の $[f], [g] \in \mathcal{F}_p$, $a \in \mathbb{R}$ に関して

$$\begin{cases} \widetilde{[f]} + \widetilde{[g]} = (\widetilde{[f] + [g]}), \\ a \cdot \widetilde{[f]} = (\widetilde{a[f]}) \end{cases} \tag{2.9}$$

である．

定理 2.2　関数 $f^1, \cdots, f^s \in C_p^\infty$ とし，$F\left(y^1, \cdots, y^s\right)$ は $\left(f^1(p), \cdots, f^s(p)\right) \in \mathbb{R}^s$ の近傍における滑らかな関数とする．このとき，$f = F\left(f^1, \cdots, f^s\right) \in C_p^\infty$ であり，

$$(df)_p = \sum_{k=1}^s \left[\left(\frac{\partial F}{\partial f^k}\left(f^1(p), \cdots, f^s(p)\right) \right) \cdot (df^k)_p \right] \tag{2.10}$$

である.

証明 点 p を含む関数 f^k の定義域を U_k とする．このとき，関数 f は $\bigcap_{k=1}^{s} U_k$ で定義され，任意の $q \in \bigcap_{k=1}^{s} U_k$ に対して，

$$f(q) = F\left(f^1(q), \cdots, f^s(q)\right)$$

である．F は滑らかな関数なので, $f \in C_p^\infty$ となる．ここで $a_k = \dfrac{\partial F}{\partial f^k}\left(f^1(p), \cdots, f^s(p)\right)$ とおくと，任意の $\gamma \in \Gamma_p$ に対して

$$\begin{aligned}\ll \gamma, [f] \gg &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(f^1 \circ \gamma(t), \cdots, f^s \circ \gamma(t)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_k \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(f^k \circ \gamma(t)\right) \\ &= \ll \gamma, \sum_{k=1}^{s} a_k \left[f^k\right] \gg \end{aligned}$$

である．したがって，

$$[f] - \sum_{k=1}^{s} a_k \left[f^k\right] \in \mathcal{H}_p.$$

すなわち，

$$(df)_p = \sum_{k=1}^{s} a_k (df^k)_p. \qquad \square$$

系 1 任意の $f, g \in C_p^\infty$，$a \in \mathbb{R}$ に対して

$$d(f+g)_p = (df)_p + (dg)_p, \tag{2.11}$$

$$d(af)_p = a \cdot (df)_p, \tag{2.12}$$

$$d(fg)_p = f(p) \cdot (dg)_p + g(p) \cdot (df)_p \tag{2.13}$$

が成り立つ.

証明 (2.11) と (2.12) は (2.9) と同値であり，(2.13) は定理 2.2 から直接導かれる．

$\square$

系 2 $\dim T_p^* = m$.

証明 許容座標系 (U, φ_U) を選び，局所座標 u^i を次で定義する．

$$u^i(q) = (\varphi_U(q))^i = x^i \circ \varphi_U(q), \quad q \in U. \tag{2.14}$$

ここで x^i は $\mathbb{R}^m$ の座標系とする．したがって，$u^i \in C_p^\infty$，$(du^i)_p \in T_p^*$ である．次に，$\{(du^i)_p, 1 \leq i \leq m\}$ が T_p^* の基底であることを証明しよう．

$(df)_p \in T_p^*$ と仮定しよう．すると，$f \circ \varphi_U^{-1}$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合で定義された滑らかな関数である．$F\left(x^1, \ldots, x^m\right) = f \circ \varphi_U^{-1}(x^1, \ldots, x^m)$ としよう．このとき，

$$f = F(u^1, \ldots, u^m) \tag{2.15}$$

である．定理 2.2 によって

$$(df)_p = \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \left(u^1(p), \cdots, u^m(p)\right) \right) \cdot (du^i)_p \right] \tag{2.16}$$

となる．したがって，$(df)_p$ は $(du^i)_p$ $(1 \leq i \leq m)$ の 1 次結合である．

次に，

$$\sum_{i=1}^m a_i (du^i)_p = 0 \tag{2.17}$$

をみたす実数 a_i $(1 \leq i \leq m)$ が存在すると仮定する．すなわち

$$\sum_{i=1}^m a_i \left[u^i\right] \in \mathcal{H}_p.$$

このとき，任意 $\gamma \in \Gamma_p$ に対して

$$\ll \gamma, \sum_{i=1}^m a_i \left[u^i\right] \gg = \sum_{i=1}^m a_i \left. \frac{d(u^i \circ \gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} = 0 \tag{2.18}$$

が成り立つ．式

$$u^i \circ \lambda_k(t) = u^i(p) + \delta_k^i t \tag{2.19}$$

をみたす $\lambda_k \in \Gamma_p$ $(1 \leq k \leq m)$ を選べば，

$$\left. \frac{d(u^i \circ \lambda_k(t))}{dt} \right|_{t=0} = \delta_k^i$$

が成り立つ．ただし，ここで

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

である．次に，$\gamma = \lambda_k$ とおく．このとき，(2.18) により $a_k = 0$ $(1 \leq k \leq m)$ である．すなわち，$\{(du^i)_p,\ 1 \leq i \leq m\}$ は 1 次独立である．したがって，これは，局所座標系 u^i に関する T_p^* の**自然基底**とよばれる T_p^* の基底になる．よって，T_p^* は m 次元線形空間である．□

定義により，任意の $\gamma \in \Gamma_p$ に対して $[f] - [g] \in \mathcal{H}_p$ となるための必要十分条件は $\ll \gamma, [f] \gg = \ll \gamma, [g] \gg$ であるので，

$$\ll \gamma, (df)_p \gg = \ll \gamma, [f] \gg, \qquad \gamma \in \Gamma_p, \qquad (df)_p \in T_p^* \tag{2.20}$$

と定義できる．さて，Γ_p に関係 $\sim$ を以下のように定義しよう．任意の $\gamma, \gamma' \in \Gamma_p$ に対して，$\gamma \sim \gamma'$ であるための必要十分条件は，任意の $(df)_p \in T_p^*$ に対して

$$\ll \gamma, (df)_p \gg = \ll \gamma', (df)_p \gg \tag{2.21}$$

が成り立つことである．これは明らかに同値関係であり，γ の同値類を $[\gamma]$ で表すと，

$$\langle [\gamma], (df)_p \rangle = \ll \gamma, (df)_p \gg \tag{2.22}$$

と定義できる．ゆえに，同値類 $[\gamma]$ $(\gamma \in \Gamma_p)$ は T_p^* の双対空間を生成する．このことを示すために局所座標系を用いる．

局所座標 u^i で，$\gamma \in \Gamma_p$ を

$$u^i = u^i(t), \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.23}$$

で表すと，(2.22) は

$$\langle [\gamma], (df)_p \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi^i \tag{2.24}$$

とかける．ここで，

$$a_i = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi_U^{-1})}{\partial u^i} \right)_{\varphi_U(p)}, \qquad \xi^i = \left(\frac{du^i}{dt} \right)_{t=0} \tag{2.25}$$

とおいた．係数 a_i は，自然基底 $(du^i)_p$ ((2.16) 参照) における余接ベクトル $(df)_p$ の成分そのものである．明らかに，$\langle [\gamma], (df)_p \rangle$ は成分 ξ^i によって決まる T_p^* 上の線形関数である．ここで任意の ξ^i に対して，曲線 γ を

$$u^i(t) = u^i(p) + \xi^i t \tag{2.26}$$

とする．すると，$\langle [\gamma] (df)_p \rangle$ $(\gamma \in \Gamma_p)$ は，T_p^* 上の線形汎関数の集合を表し，点 p における M の**接空間** T_p とよばれるその双対空間をつくる．接空間の要素は**接ベクトル**とよばれる．

接ベクトルの幾何学的な意味は簡単である．つまり，任意の $\gamma' \in \Gamma_p$ を

$$u'^i = u'^i(t), \qquad 1 \leq i \leq m$$

と表せば，$[\gamma] = [\gamma']$ となるための必要十分条件は

$$\left(\frac{du^i}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{du'^i}{dt} \right)_{t=0}$$

である．したがって，γ と γ' が同値であることは，それら 2 つのパラメーター曲線が 1 点 p で同じ接ベクトルをもつことである (図 4 参照)．したがって，点 p における M の接ベクトルは，点 p で同じ接ベクトルをもつようなパラメーター曲線の集合と同一視できる．

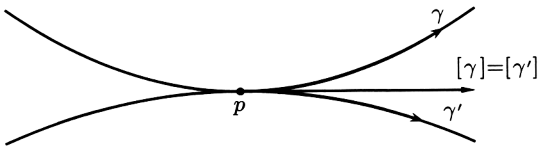


図 4

以下の議論により，関数

$$\langle X, (df)_p\rangle, \qquad X = [\gamma] \in T_p, \quad (df)_p \in T_p^*$$

は双 1 次線形である．すなわち，それぞれの変数について線形関数になっている．パラメーター曲線 λ_k $(1 \leq k \leq m)$ が (2.19) で与えられるとき，

$$\langle[\lambda_k], (du^i)_p\rangle = \delta_k^i \tag{2.27}$$

が成り立つ．したがって $\{[\lambda_k],\ 1 \leq k \leq m\}$ は $\left\{(du^i)_p,\ 1 \leq i \leq m\right\}$ の双対基底である．(双対基底の定義については，次章の §2-1 を参照のこと．)

ベクトル $[\lambda_k]$ にはもう一つの意味がある．すなわち，

$$\begin{aligned}\langle[\lambda_k], (df)_p\rangle &= \left\langle [\lambda_k],\ \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)_p \cdot (du^i)_p \right\} \right\rangle \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u^k}\right)_p \end{aligned} \tag{2.28}$$

が成り立つ．ここで，$\partial f/\partial u^i$ は $\partial(f \circ {\varphi_U}^{-1})/\partial u^i$ を意味する．したがって，同値類 $[\lambda_k]$ は関数芽 $[f]$ 上の偏微分作用素 $(\partial/\partial u^k)$ である．さらに，(2.27) は

$$\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial u^k}\right|_p, (du^i)_p \right\rangle = \delta_k^i \tag{2.29}$$

とかける．接空間 T_p における $\left\{(du^i)_p,\ 1 \leq i \leq m\right\}$ の双対基底を，T_p の局所座標系 (u^i) での**自然基底**とよぶ．(2.24) により

$$[\gamma] = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p$$

となる．したがって，ξ^i は自然基底に関する接ベクトル $[\gamma]$ の成分である．同値類 $[\gamma'] \in T_p$ の成分を ξ'^i とすると，同値類の和 $[\gamma] + [\gamma']$ は，成分 $\xi^i + \xi'^i$ によって決定される．同様に，接ベクトル $a \cdot [\gamma]$ $(a \in \mathbb{R})$ の成分は $a\xi^i$ である．簡単のため，混乱がない場合には，接ベクトルや余接ベクトルの点 p の指定を省略する．

定義 2.2 関数 f を，点 p の近傍で定義された C^∞ 関数とする．このとき，$(df)_p \in T_p^*$ を点 p における関数 f の**微分**とよぶ．もし $(df)_p = 0$ ならば，点 p を関数 f の**臨界点**とよぶ．

多様体 M 上の滑らかな関数の臨界点の研究は**モース理論**とよばれ，可微分多様体論の重要な分野である．詳しくは Milnor 1963 を参照されたい．

定義 2.3 $X \in T_p$, $f \in C_p^\infty$ が与えられているとき，

$$X f = \langle X, (df)_p \rangle \tag{2.30}$$

とかく．この $X f$ を接ベクトル X に沿う関数 f の**方向微分**という．

方向微分に関しては，以下の性質が成り立つ．

定理 2.3 任意の $X \in T_p$, $f, g \in C_p^\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，次が成り立つ．
1) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot X f + \beta \cdot X g$,
2) $X(f g) = f(p) \cdot X g + g(p) \cdot X f$

証明 これは，定理 2.2 の系 1 によりただちに示される． □

注意 1．定理 2.3 の 1) は，接ベクトル X が関数空間 C_p^∞ 上の線形作用素とみなせること示している．接ベクトル X が定数関数 c に作用すると，性質 1), 2) より，その結果は 0 である．

注意 2．接ベクトルを，性質 1), 2) により定義している本[4)]もある．実際，性質 1), 2) をみたす C_p^∞ 上の作用素の全体は，T_p^* に双対な線形空間になる．その空間は T_p と同一視できる．

局所座標 u^i を用いて，接ベクトル $X = [\gamma] \in T_p$ と余接ベクトル $a = df \in T_p^*$

4） 例えば，Chevalley 1946 を参照．

は，自然基底で，

$$X=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i},\qquad a=\sum_{i=1}^{m}a_i du^i \tag{2.31}$$

とかける．ここで

$$\xi^i=\frac{d(u^i\circ\gamma)}{dt},\quad a_i=\frac{\partial f}{\partial u^i}$$

である．ところで，別の局所座標 u'^i の元で，接ベクトル X と余接ベクトル a の自然基底に関する成分をそれぞれ ξ'^i と a'_i とすると，これらは，変換則

$$\xi'^j=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial u'^j}{\partial u^i}, \tag{2.32}$$

$$a_i=\sum_{j=1}^{m}a'_j\frac{\partial u'^j}{\partial u^i} \tag{2.33}$$

をみたしている．ここで

$$\frac{\partial u'^j}{\partial u^i}=\frac{\partial(\varphi'_U\circ\varphi_U^{-1})^j}{\partial u^i}$$

は座標変換 $\varphi'_U\circ\varphi_U^{-1}$ のヤコビ行列である．なお，テンソル解析では，(2.32) をみたすベクトルを**反変**ベクトルとよび，(2.33) をみたすものを**共変**ベクトルとよぶ．

可微分多様体の間の滑らかな写像は，それらの接空間と余接空間との間の線形写像を誘導する．すなわち，滑らかな写像 $F:M\longrightarrow N$ をとると，任意の点 $p\in M$ と $q=F(p)$ に対して，写像 $F^*:T_q^*\longrightarrow T_p^*$ を

$$F^*(df)=d(f\circ F),\qquad df\in T_q^* \tag{2.34}$$

と定義する．これを写像 F の**微分**(または双対微分) とよぶ．これは明らかに線形写像である．

次に，写像 F^* の随伴作用，すなわち $F_*:T_p\longrightarrow T_q$ を，任意の $X\in T_p$, $a\in T_q^*$ に対して

$$\langle F_*X,a\rangle=\langle X,F^*a\rangle \tag{2.35}$$

で定義する．この写像 F_* を，F によって誘導された**接写像**(または微分写像) という．ここで点 p, q の近傍の局所座標系をそれぞれ u^i と v^α とすると，写像 F は点 p の近傍で

$$v^\alpha=F^\alpha\left(u^1,\ldots,u^m\right),\qquad 1\le\alpha\le n \tag{2.36}$$

とかける．このとき，自然基底 $\{dv^\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$ 上の F^* の作用は，

$$F^*(dv^\alpha) = d(v^\alpha \circ F) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i}\right)_p du^i \tag{2.37}$$

である．

関数 F^* の自然基底 $\{dv^\alpha\}$ と $\{du^i\}$ に関する表現行列は，ヤコビ行列 $(\partial F^\alpha/\partial u^i)_p$ そのものである．同様に，自然基底 $\{\partial/\partial u^i\}$ 上の関数 F_* の作用は，

$$\begin{aligned}\left\langle F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), dv^\alpha\right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, F^*(dv^\alpha)\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, du^j\right\rangle \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^j}\right)_p \\ &= \left\langle \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial F^\beta}{\partial u^i}\right)_p \frac{\partial}{\partial v^\beta}, dv^\alpha\right\rangle\end{aligned}$$

である．すなわち

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial F^\beta}{\partial u^i}\right)_p \frac{\partial}{\partial v^\beta} \tag{2.38}$$

とかける．したがって，関数 F_* の自然基底 $\{\partial/\partial u^i\}$ と $\{\partial/\partial v^\alpha\}$ に関する表現行列は，やはりヤコビ行列 $(\partial F^\alpha/\partial u^i)_p$ である．

§1-3 部分多様体

部分多様体の話に入る前に，可微分多様体の間の滑らかな写像から誘導される微分写像の話から入ろう．滑らかな写像 $\varphi : M \longrightarrow N$ が与えられたとき，任意の点 $p \in M$ に対して，接空間の間に誘導された微分写像 $\varphi_* : T_p(M) \longrightarrow T_q(N)$，$q = \varphi(p)$ が存在する．ここで，任意の点 $p \in M$ における微分写像 φ_* の性質が点 p の近傍における写像 φ の振舞いを決めることは，非常に重要な点である．このことに関する古典的な定理に**逆関数定理**がある．

定理 3.1 W を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし，$f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を滑らかな写像としよう．このとき，任意の点 $x_0 \in W$ におけるヤコビ行列の行列式の値が 0 でなければ，すなわち

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{x_0} \neq 0$$

ならば，次の性質をみたす点 x_0 の $\mathbb{R}^n$ での近傍 $U \subset W$ が存在する．すなわち，$V = f(U)$ は点 $f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ の近傍であり，かつ関数 f は V 上の滑らかな逆関数

$$g = f^{-1} : V \longrightarrow U \tag{3.1}$$

をもつ．

前節の後半の議論により，関数 f のヤコビ行列 $(\partial f^i/\partial x^j)$ は，関数 f_* の自然基底での表現行列そのものである．したがって，$\det(\partial f^i/\partial x^j)|_{x_0} \neq 0$ により

$$f_* : T_{x_0}(W)\ (\simeq \mathbb{R}^n) \longrightarrow T_{f(x_0)}(\mathbb{R}^n)\ (\simeq \mathbb{R}^n)$$

は同形であることがわかる．ここで，g が f の逆関数というのは，

$$g \circ f = \mathrm{id} : U \longrightarrow U, \qquad f \circ g = \mathrm{id} : V \longrightarrow V \tag{3.2}$$

を意味している．写像 f と g はそれぞれ滑らかなので，U に制限された写像 f は U から V への微分同相写像である．つまり，任意の点において写像 f の微分写像 f_* が同形ならば，f はその点の近傍から $\mathbb{R}^n$ の開集合への微分同形写像である，と逆関数定理は述べているのである．

局所座標を用いて，定理 3.1 を多様体の場合に容易に一般化できる．

定理 3.2　M と N をそれぞれ n 次元可能微分多様体とし，$f : M \longrightarrow N$ を滑らかな写像としよう．任意の点で微分写像 $f_* : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ が同形ならば，$V = f(U)$ が点 $f(p)$ における N での近傍であり，写像 $f|_U : U \longrightarrow V$ は微分同相写像になるような点 p における M での近傍 U が存在する．

証明　写像 $f : M \longrightarrow N$ は滑らかであるので，$f(U_0) \subset V_0$ をみたし，

$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_0) \longrightarrow \psi(V_0) \subset \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

が滑らかな写像になるような点 $p \in M$ における局所座標系 (U_0, φ) と点 $q = f(p) \in N$ における局所座標系 (V_0, ψ) を選ぶことができる．明らかに，点 $\varphi(p)$ における関数 $\widetilde{f}$ のヤコビ行列の行列式の値は 0 でない．したがって定理 3.1 により，$\widetilde{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ が微分同形写像になるような $\varphi(p)$ の近傍 $\widetilde{U} \subset \varphi(U_0)$ と点 $\psi(q)$ の近傍 $\widetilde{V} \subset \psi(V_0)$ が存在する．

$U = \varphi^{-1}(\widetilde{U}), V = \psi^{-1}(\widetilde{V})$ としよう．このとき，$U \subset M$ と $V \subset N$ はそれぞれ点 p, 点 q における近傍であり，

$$f = \psi^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \varphi : U \longrightarrow V \tag{3.4}$$

は微分同形である. □

注意. 定理 3.2 での多様体 M と N は同次元なので, 条件「微分写像 f_* は同形である」というのは,「f_* は単射である」と同値である. M は m 次元多様体, N は n 次元多様体, 写像 $f: M \longrightarrow N$ は滑らかで, かつ微分写像 f_* が点 p で単射であるとき, f_* は点 p で**非退化**であるという. 明らかに, この場合 $m \leq n$ で, 点 p における f のヤコビ行列の階数は m である.

定理 3.2 の応用として次が成り立つ.

定理 3.3 多様体 M は m 次元, 多様体 N は n 次元で, $m < n$ としよう. $f: M \longrightarrow N$ は滑らかな写像でその微分写像 f_* が点 $p \in M$ で非退化ならば, $f(U) \subset V$ となるような点 p の局所座標系 $(U; u^i)$ と点 $q = f(p)$ の局所座標系 $(V; v^\alpha)$ が存在する. さらに, 写像 $f|_U$ は局所座標を用いて次のようにかける. 任意の点 $x \in U$ に対して

$$\begin{cases} v^i(f(x)) = u^i(x), \quad 1 \leq i \leq m, \\ v^\gamma(f(x)) = 0, \quad m+1 \leq \gamma \leq n. \end{cases} \tag{3.5}$$

証明 点 p, q における局所座標系をそれぞれ $(U; u^i)$, $(V; v^\alpha)$ とし, この座標系で f は

$$v^\alpha = f^\alpha(u^1, \ldots, u^m), \qquad 1 \leq \alpha \leq n$$

とかけるとする. ここで $u^i(p) = 0$, $v^\alpha(q) = 0$ としよう. 写像 f_* は点 p で非退化なので,

$$\left.\frac{\partial(f^1, \ldots, f^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^m)}\right|_{u^i=0} \neq 0 \tag{3.6}$$

と仮定できる. ここで

$$I_{n-m} = \{\, (w^{m+1}, \ldots, w^n) \bigm| |w^\gamma| \leq \delta,\ m+1 \leq \gamma \leq n\}$$

とおく. ここで δ はある正数である. このとき, 近傍 U と正数 δ を十分小さくすれば,

$$\begin{cases} \widetilde{f}^i(u^1, \ldots, u^m, w^{m+1}, \ldots, w^n) = f^i(u^1, \ldots, u^m), \\ \widetilde{f}^\gamma(u^1, \ldots, u^m, w^{m+1}, \ldots, w^n) = w^\gamma + f^\gamma(u^1, \ldots, u^m) \end{cases} \tag{3.7}$$

をみたす滑らかな写像 $\widetilde{f}: U \times I_{n-m} \longrightarrow V$ が定義できる. ここで, $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq \gamma \leq n$ である. 明らかに点 $(u^i, w^\gamma) = (0, 0)$ における $\widetilde{f}$ のヤコビ行列は非退化なので, 定理 3.2 より, 点 $(0, 0)$ の適当な近傍で $\widetilde{f}$ は微分同形写像になる. したがって, $\widetilde{f}: U \times I_{n-m} \longrightarrow V$ は微分同形写像としてよい. このとき $\{u^i, w^\gamma\}$ は点 q における

近傍 V の局所座標系 v^α として選べる．この座標系で $\widetilde{f}$ は恒等写像となる，すなわち

$$\begin{cases} v^i = u^i, & 1 \le i \le m, \\ v^\gamma = w^\gamma, & m+1 \le \gamma \le n. \end{cases} \tag{3.8}$$

明らかに，$\widetilde{f}|_{U\times\{0\}} = f|_U$ となる．したがって，上記の座標系で写像 $f|_U$ は，(3.5) で表される．すなわち

$$f(u^1,\ldots,u^m) = (u^1,\ldots,u^m,0,\ldots,0)$$

である．　□

この定理より，写像 f_* が点 p で単射であれば，f も p の近傍で単射となる．

定義 3.1　M と N を可微分多様体としよう．条件

1) φ は単射である，

2) 任意の点 $p \in M$ で微分写像 $\varphi_* : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(N)$ は非退化である，

をみたす滑らかな写像 $\varphi : M \longrightarrow N$ が存在するとき，(φ, M) は N の**滑らかな部分多様体**または**埋め込まれた部分多様体**といわれる．写像 φ が条件 2) のみをみたすとき φ を**はめ込み**といい，(φ, M) を N の**はめ込まれた部分多様体**という．

はめ込みは，局所的に単射であるが，大域的には単射であるとは限らない．はめ込まれた部分多様体と埋め込まれた部分多様体との違いは，前者の像 $\varphi(M)$ は自分自身と交わる点をもちうるが，後者はそれをもたないことである．

例 1. 開部分多様体．　U を N の開部分集合としよう．N の可微分構造を U に制限すれば U 上の可微分構造が得られ，U が N と同次元の可微分多様体となる．$\varphi = \mathrm{id} : U \longrightarrow N$ を恒等写像としよう．このとき，(φ, U) は N の埋め込まれた部分多様体となる．これを N の**開部分多様体**とよぶ．

例 2. 閉部分多様体．　(φ, M) を N の滑らかな部分多様体としよう．もし，

1) $\varphi(M)$ は N の閉部分集合であり，

2) 任意の点 $q \in \varphi(M)$ で，$\varphi(M) \cap U$ が

$$u^{m+1} = u^{m+2} = \cdots = u^n = 0, \qquad m = \dim M$$

で定義できる局所座標系 $(U; u^i)$ が存在する，

とする．このとき，(φ, M) を N の**閉部分多様体**とよぶ．例えば，単位球 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とその恒等写像 $\varphi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の閉部分多様体となる．

例 3. 関数 $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$F(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right), \sin 2\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)\right) \tag{3.9}$$

で定義しよう．このとき，$(F, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2$ のはめ込まれた部分多様体であり，埋め込まれた部分多様体ではない (図 5 参照).

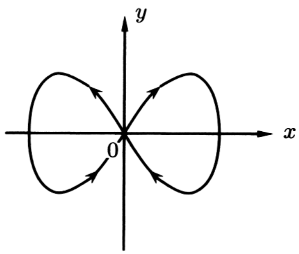


図 5

例 4. 関数 $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$G(t) = \left(2\cos\left(2\arctan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right), \sin 2\left(2\arctan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \tag{3.10}$$

で定義しよう．このとき，$(G, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2$ の埋め込まれた部分多様体である (図 6 参照)．点 $t = 0$ で $G(0) = (0, 0)$ であり，$t \to \pm\infty$ のとき $G(t) \to (0, 0)$ となる．

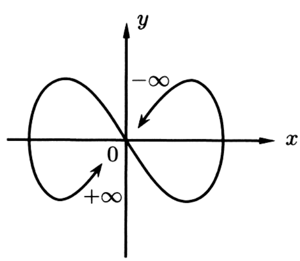


図 6

例 5. 関数 F を

$$F(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{t^2}, \sin \pi t\right), & 1 \leq t < +\infty, \\ (0, t+2), & -\infty < t \leq -1 \end{cases} \tag{3.11}$$

としよう．さらに，この関数を点 $(3,0)$ と点 $(0,1)$ を結んで (図 7 の破線を参照)，区間 $[-1,1]$ を含むように滑らかに拡張しよう．このとき，$t \to +\infty$ とすると，その曲線は線分 $-3 \leq t \leq -1$ に限りなく近づく．ゆえに，$(F, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2$ の埋め込まれた部分多様体である．

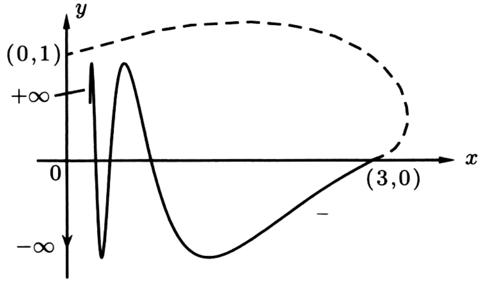


図 7

例 6. トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ (図 8 参照) は，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ での単位正方形の対辺の点を同一視することによって得られる 2 次元多様体である．その任意の点は，順序づけられた実数 $(x, y) \bmod 1$ で表される．

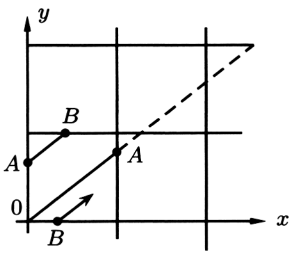


図 8

ここで，商 $\frac{a}{b}$ が無理数となるような任意の実数 a, b を選ぼう．写像 $\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow T^2$ を

$$\varphi(t) = (at \bmod 1, bt \bmod 1)$$

で定義しよう．すると，$(\varphi, \mathbb{R})$ は T^2 の埋め込まれた部分多様体であるが，その像 $\varphi(\mathbb{R})$ は T^2 で稠密である．一方，商 $\frac{a}{b}$ が有理数のとき，像 $\varphi(\mathbb{R})$ は T^2 のはめ込まれた部分多様体である．

埋め込まれた部分多様体 (φ, M) に関して φ は単射なので，M の可微分構造は $\varphi(M)$ 上に写される．よって，$\varphi : M \longrightarrow \varphi(M)$ は微分同形写像となる．一方，$\varphi(M)$ は N の部分集合として N より誘導位相が入る．写像 φ を通して M から導かれる $\varphi(M)$ の位相は，N から誘導される位相とは必ずしも一致しているとは限らないことが最後の三つの例からわかる．一般に，φ を通して得られる M の位相は，N から誘導される位相より強い．このことから，次の定義は自然なものといえよう．

定義 3.2 (φ, M) を N の滑らかな部分多様体としよう．写像 $\varphi : M \longrightarrow \varphi(M) \subset N$ が位相同形であるとき，(φ, M) を N の**正則部分多様体**といい，写像 φ を M から N への**正則な埋め込み**という．

正則部分多様体は次の定理で特徴づけられる．

定理 3.4 (φ, M) を n 次元可微分多様体 N の m 次元部分多様体としよう．このとき，(φ, M) が N の正則部分多様体となるための必要十分条件は，それが N の開部分多様体の閉部分多様体であることである．

証明 十分性．N の閉部分多様体 (φ, M) が正則部分多様体であることを示せばよい．任意の点 $p \in M$ 選べば，閉部分多様体の定義より，$\varphi(M) \cap V$ が

$$v^{m+1} = \cdots = v^n = 0 \tag{3.12}$$

で定義されるような点 $q = \varphi(p)$ における局所座標系 $(V; v^\alpha)$ が N 上に存在する．写像 φ は連続なので，$\varphi(U) \subset V$ となる局所座標系 $(U; u^i)$ が存在する．ここで，$u^i(p) = 0$, $v^\alpha(q) = 0$, $V = \{(v^1, \ldots, v^n) \mid |v^\alpha| < \delta\}$ としてよい．ただし，δ はある正数である．すると，$\varphi(U) \subset \varphi(M) \cap V$ となる．

写像 $\varphi^{-1} : \varphi(M) \subset N \longrightarrow M$ も連続であることを示すことが目標である．そのためには，$\varphi(M) \cap V_1$ の原像が U に含まれるような十分小さな $\delta_1 > 0$ を選ぶことができるということを示せばよい．(3.12) より，写像 $\varphi|_U$ は局所的に

$$\begin{cases} v^i = \varphi^i(u^1, \ldots, u^m), & 1 \leq i \leq m, \\ v^\gamma = 0, & m+1 \leq \gamma \leq n \end{cases} \tag{3.13}$$

とかける．よって，そのヤコビ行列 $\left.\dfrac{\partial(\varphi^i,\cdots,\varphi^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)}\right|_{u^i=0} \neq 0$ である．したがって，定理 3.1 より，関数の集合で，$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$ の逆関数の集合

$$u^i=\psi^i(v^1,\ldots,v^m), \qquad |v^i|<\delta_1$$

が成り立つような δ_1 $(0<\delta_1<\delta)$ が存在する．ここで，

$$V_1=\left\{\left(v^1,\ldots,v^m,v^{m+1},\ldots,v^n\right)\middle|\ |v^\alpha|<\delta_1\right\}$$

としよう．すると，$\varphi(M)\cap V_1$ の原像全体は U に含まれる．したがって，$\varphi: M \longrightarrow \varphi(M)\subset N$ は同相写像であり，よって (φ, M) は正則部分多様体である．

必要性．いま，(φ, M) は N の正則部分多様体で，$p\in M$ としよう．すると，点 p の任意の近傍 $U\subset M$ に対して，$\varphi(U)=\varphi(M)\cap V$ となるような点 $q=\varphi(p)$ の近傍 V が存在する．定理 3.3 より，局所座標系を用いると，$\varphi(U_1)\subset V_1$ で，かつ $\varphi|_{U_1}$ が

$$\varphi\left(u^1,\ldots,u^m\right)=\left(u^1,\ldots,u^m,0,\ldots,0\right) \tag{3.14}$$

とかけるような点 p と点 q での局所座標系 $\left(U_1;u^i\right)$ と $(V_1;v^\alpha)$ がそれぞれ存在する．ここで $U_1\subset U$ としてよい．そうすると $\varphi(U_1)=\varphi(M)\cap V_1$ となる $V_1\subset V$ がとれる．(3.14) によって，$\varphi(M)\cap V_1$ は

$$v^{m+1}=\cdots=v^n=0 \tag{3.15}$$

で定義される．

任意の点 $q\in\varphi(M)$ に対して，(3.15) が成り立つ点 q の N における近傍を V_q で表そう．$W=\bigcup_{q\in\varphi(M)} V_q$ とおくと，W は $\varphi(M)$ を含む N の開部分多様体である．$\varphi(M)$ は，N の位相部分空間として，W における相対閉集合であることを示す必要がある．すなわち，$W\cap\overline{\varphi(M)}=\varphi(M)$ を示す必要がある．ここで，$\overline{\varphi(M)}$ は N における $\varphi(M)$ の閉包である．ここで任意の点 $s\in W\cap\overline{\varphi(M)}$ をとろう．すると，W の定義により，$s\in V_q$ となるような点 $q\in\varphi(M)$ が存在する．(3.15) により，$\varphi(M)\cap V_q$ は V_q での座標平面になるので，V_q での相対閉部分集合である．すでに，$s\in\overline{\varphi(M)}\cap V_q$ を仮定している．すなわち，s は V_q における $\varphi(M)\cap V_q$ の相対閉包に入っているので，$s\in\varphi(M)\cap V_q$ となる．したがって，$W\cap\overline{\varphi(M)}\subset\varphi(M)$ である．すなわち，

$$W\cap\overline{\varphi(M)}=\varphi(M)$$

となる．

以上より，(φ, M) は N における開部分多様体 W の閉部分多様体である．　□

上記の定理の証明の中で，次の系も証明された．

系 可微分多様体 N の部分多様体 (φ, M) が正則部分多様体になるための必要十分条件は，$\varphi(M) \cap V$ が

$$v^{m+1} = v^{m+2} = \cdots = v^n = 0$$

で定義されるような点 $q = \varphi(p) \in N$ の局所座標系 $(V; v^\alpha), v^\alpha(q) = 0$ が存在することである．

定理 3.5 (φ, M) を可微分多様体 N の部分多様体とする．M がコンパクトならば，$\varphi : M \longrightarrow N$ は正則埋め込みである．

証明 $\varphi(M)$ は，N の位相部分空間としてハウスドルフ空間である．さらに，$\varphi : M \longrightarrow \varphi(M) \subset N$ は，コンパクト空間 M からハウスドルフ空間 (φ, M) への 1 対 1 連続写像なので，$\varphi : M \longrightarrow \varphi(M) \subset N$ は位相同相写像である．したがって，(φ, M) は，N の正則部分多様体である． □

H. Whitney は，m 次元可微分多様体が $(2m+1)$ 次元ユークリッド空間に部分多様体として埋め込むことができるという定理を証明した (Auslander and Mackenzie 1963 参照)．以下において，M がコンパクトの場合，この定理よりもゆるい形の定理 (定理 3.6) を示そう．その証明に必要な二三の補題を準備する．これらは他の問題でも有用である．

補題 1 $\mathbb{R}^m$ で $\overline{D_1} \subset D_2$ となる二つの同心球 D_1, D_2 をとろう．このとき，

1) $0 \leq f \leq 1$,

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_1 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m - D_2 \end{cases}$

となる $\mathbb{R}^m$ 上の滑らかな実数値関数 f が存在する．

証明 まず，D_1, D_2 は，原点を中心とし，半径がそれぞれ a, b $(0 < a < b)$ の球としてよい．関数 g を

$$g(t) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{1}{(t-a^2)(t-b^2)}\right\}, & t \in (a^2, b^2), \\ 0, & t \notin (a^2, b^2) \end{cases} \tag{3.16}$$

で定義すると，それは $\mathbb{R}^1$ 上の滑らかな関数である．続いて，

$$F(t) = \int_t^\infty g(s)\,ds \Bigg/ \int_{-\infty}^\infty g(s)\,ds \tag{3.17}$$

とおくと，関数 F は $\mathbb{R}^1$ 上の滑らかな関数であり，$0 \leq F \leq 1$ となる．$t \leq a^2$ のとき，

$F(t)=1$ となり，$t \geq b^2$ のとき，$F(t)=0$ となる．ここで，

$$f(x^1,\ldots,x^m)=F\left((x^1)^2+\cdots+(x^m)^2\right) \tag{3.18}$$

とおけば，関数 f は条件をみたす．　□

補題 2　$\mathbb{R}^m$ 上で $\overline{V}\subset U$ で，$\overline{V}$ はコンパクトとなる空でない二つの開集合 U, V をとろう．このとき，

1) $0\leq f\leq 1$,

2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^m-U\end{cases}$

となる $\mathbb{R}^m$ 上の滑らかな実数値関数 f が存在する．

証明　$\overline{V}$ はコンパクトで，$\overline{V}\subset U$ なので，

$$\overline{D_i^{(1)}}\subset D_i^{(2)}\subset U, \tag{3.19}$$

かつ $\{D_i^{(1)}\}_{1\leq i\leq r}$ は，$\overline{V}$ の開被覆であるような，有限個の同心球の二つの対集合 $\{D_i^{(1)},D_i^{(2)}\}_{1\leq i\leq r}$ が存在する．補題 1 により，任意の i $(1\leq i\leq r)$ に対して，$0\leq f_i\leq 1$ で

$$f_i(x)=\begin{cases}1, & x\in D_i^{(1)},\\ 0, & x\notin D_i^{(2)}\end{cases} \tag{3.20}$$

をみたす滑らかな関数 $f_i:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^1$ が存在する．

ここで，

$$f=1-\prod_{i=1}^{r}(1-f_i) \tag{3.21}$$

とおくと，関数 f は条件 1), 2) をみたす．　□

補題 3　(U,φ_U) を可微分多様体 M の座標系とする．$\overline{V}\subset U$ で，$\overline{V}$ がコンパクトとなる M の開集合を $V\,(\neq\varnothing)$ とする．このとき，

1) $0\leq h\leq 1$,

2) $h(p)=\begin{cases}1, & p\in V,\\ 0, & p\notin U\end{cases}$

となる滑らかな関数 $h:M\longrightarrow\mathbb{R}^1$ が存在する．

証明　$\overline{V}$ はコンパクトで，$\overline{V}\subset U$ なので，M の局所コンパクト性に基づいて，

$$\overline{V}\subset U_1\subset\overline{U_1}\subset U$$

をみたす開集合 U_1 がとれる．ここで $\dim M = m$ としよう．すると，$\varphi_U(V)$ と $\varphi_U(U_1)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^m$ の開集合となる．補題 2 より，$0 \leq f \leq 1$ で

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \varphi_U(V), \\ 0, & x \notin \varphi_U(U_1) \end{cases} \tag{3.22}$$

をみたす $\mathbb{R}^m$ 上の滑らかな関数 f が存在する．さらに，

$$h(p) = \begin{cases} f \circ \varphi_U(p), & p \in U, \\ 0, & p \notin U \end{cases} \tag{3.23}$$

とおけば，関数 h は M 上の滑らかな関数であり，条件 1), 2) をみたす． □

注意．補題 3 の条件を次のように変更できる．集合 U, V は可微分多様体 M の空でない二つの部分集合としよう．ただし，$\overline{V}$ はコンパクトで，$\overline{V} \subset U$ とする．このとき，補題 3 の条件 1), 2) をみたす滑らかな実数値関数 h が存在する．(読者はこのことの証明を試みること．)

定理 3.6 M を m 次元コンパクト可微分多様体としよう．このとき，(φ, M) が $\mathbb{R}^n$ の正則部分多様体となるような正の整数 n と滑らかな写像 $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する．

証明 M はコンパクトなので，各 j について $\overline{V}_j$ がコンパクトで，かつ $\overline{V}_j \subset U_j$ をみたす有限開被覆 $\{V_j\}_{1 \leq j \leq r}$ が存在する．ただし，U_j は座標近傍である．U_j の局所座標系を $u^i_{(j)}$ $(1 \leq i \leq m)$ としよう．このとき，明らかに，

$$\overline{V}_j \subset W_j \subset \overline{W}_j \subset U_j$$

をみたす開集合 W_j が存在する．補題 3 より，任意の j $(1 \leq j \leq r)$ に対して，$0 \leq f_j \leq 1$ で

$$f_j(p) = \begin{cases} 1, & p \in V_j, \\ 0, & p \notin W_j \end{cases} \tag{3.24}$$

をみたす M 上の滑らかな関数 f_j が存在する．次に，

$$x^0_j = f_j,$$
$$x^i_j(p) = \begin{cases} u^i_{(j)}(p) \cdot f_j(p), & p \in U_j, \\ 0, & p \notin U_j \end{cases} \tag{3.25}$$

で，M 上の $n = r(m+1)$ 個の滑らかな関数を定義する．ここで，$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$

である．点 (x_j^0, x_j^i) を $\mathbb{R}^n$ の点とみなすと，(3.25) は写像 $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ になっている．ここでまず，(φ, M) は $\mathbb{R}^n$ の部分多様体であることを示そう．

$\varphi(p) = \varphi(q)$ となる任意の点 $p, q \in M$ に対して

$$\begin{aligned} x_j^0(p) = x_j^0(q), \qquad & x_j^i(p) = x_j^i(q), \\ 1 \leq i \leq m, \qquad & 1 \leq j \leq r \end{aligned} \tag{3.26}$$

が成り立つ．$\{V_j\}_{1 \leq j \leq r}$ は M の被覆なので, $p \in V_k$ となるような正の整数 $k\,(1 \leq k \leq r)$ が存在する．したがって，

$$f_k(q) = x_k^0(q) = x_k^0(p) = f_k(p) = 1, \tag{3.27}$$

$$u_{(k)}^i(q) = u_{(k)}^i(p), \quad 1 \leq i \leq m \tag{3.28}$$

が成り立つ．これは，$q \in U_k$ で，p と q は両方とも U_k の中で同じ局所座標をもつことを示している．よって $q = p$ となり，φ は単射である．

次に，$p \in M$ としよう．このとき，$p \in V_k$ となるような正の整数 $k\,(1 \leq k \leq r)$ が存在する．この k に関して，$f_k(p) = 1$ で，

$$x_k^i\big|_{V_k} = u_{(k)}^i$$

となる．これより，

$$\left.\frac{\partial(x_k^1, \ldots, x_k^m)}{\partial(u_{(k)}^1, \ldots, u_{(k)}^m)}\right|_p = 1$$

となる．

したがって，微分写像 φ_* は点 p において非退化である，すなわち (φ, M) は $\mathbb{R}^n$ の埋め込まれた部分多様体である．定理 3.5 より，φ は正則埋め込みとなる．□

§1-4　フロベニウスの定理

多体様 M の任意の点 p における接ベクトル $X_p \in T_p$ の概念は §1-2 で定義した．定理 2.3 は，接ベクトル X_p は定数値関数 $X_p : C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ (ただし，C_p^∞ は p における滑らかな関数の集合) とみなせることを示している．

多様体 M の任意の点 p で M 上の接ベクトル X_p が与えられるとき，X は M 上の**接ベクトル場**とよばれる．任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$(Xf)(p) = X_p f \tag{4.1}$$

とおく．このとき Xf は M 上の実数値関数である．

定義 4.1 X は滑らかな多様体 M 上の接ベクトル場で，任意の関数 f は $f \in C^\infty(M)$ であるとすると，$Xf \in C^\infty(M)$ が成り立つ．この X を M 上の**滑らかな**接ベクトル場という．

滑らかな接ベクトル場は $C^\infty(M)$ からそれ自身への作用素である．定理 2.3 によって，X の以下の性質が得られる．任意の $f, g \in C^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

1) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha(Xf) + \beta(Xg)$,

2) $X(f \cdot g) = f \cdot Xg + g \cdot Xf$

が成り立つ．

接ベクトル場を研究するのに，その局所的振舞いを明確にする必要がある．X を多様体 M 上の滑らかな接ベクトル場としよう．このとき，任意の空でない開部分集合 U に対して，X の U における制限 $X|_U$ は開部分多様体 U の接ベクトル場である．$X|_U$ の滑らかさを証明するには，任意の $f \in C^\infty(U)$ に対して，$X|_U f$ も U 上の滑らかな関数であることを示せばよい．ここで任意の点 $p \in U$ を選ぼう．このとき $\overline{V}$ はコンパクトで，$\overline{V} \subset U$ となるような座標近傍 V が存在する．§1-3 の補題 3 により，

$$g|_V = 1, \qquad g|_{M-U} = 0$$

をみたす滑らかな関数 $g \in C^\infty(M)$ が存在する．ここで，

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & x \in U, \\ 0, & x \notin U \end{cases} \tag{4.2}$$

とおく．このとき，$\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ で，$\widetilde{f}|_V = f|_V$ となる．したがって，

$$(X|_U f)(x) = X_x f = (X\widetilde{f})(x), \quad \forall x \in V \tag{4.3}$$

が成り立つ．X は M 上の滑らかな接ベクトル場なので，$X\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ となる．したがって，$X|_U f$ は点 $p \in U$ における滑らかな関数であり，U 上の滑らかな関数である．

定理 4.1 可微分多様体 M 上の接ベクトル場 X が滑らかな接ベクトル場になるための必要十分条件は，任意の点 $p \in M$ に対して，

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{4.4}$$

が成り立つような局所座標系 $(U;u^i)$ が存在することである．ここで $\xi^i\,(1 \leq i \leq m)$ は U 上の滑らかな関数である．

証明　十分性は明らかなので，必要性の証明のみをしよう．X は M 上の滑らかな接ベクトル場なので，$X|_U$ は部分多様体 U 上の滑らかな接ベクトル場である．自然基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$ を用いて，接ベクトル場 $X|_U$ は

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

とかける．座標関数 u^i は U 上の滑らかな関数なので

$$X|_U u^i = \xi^i$$

も U 上の滑らかな関数である．□

X と Y は M 上の二つの滑らかな接ベクトル場としよう．これらの**ポアソン括弧積**を

$$[X, Y] = XY - YX \tag{4.5}$$

で定義する．このとき $[X, Y]$ は $C^\infty(M)$ 上の作用素で，任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{4.6}$$

が成り立つ．さらに，任意の関数 $f, g \in C^\infty(M)$ に対して，

1) $[X, Y](f + g) = [X, Y]f + [X, Y]g$,
2) $[X, Y](fg) = f \cdot [X, Y]g + g \cdot [X, Y]f$

が成り立つ．したがって，$[X, Y]$ は多様体 M 上の滑らかな接ベクトル場である．後で，局所座標を用いてこの括弧積を表し，その滑らかさを証明する．その前にポアソン括弧積の性質を述べよう．

定理 4.2　M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 X, Y, Z と，$f, g \in C^\infty(M)$ に対して

1) $[X, Y] = -[Y, X]$,
2) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$,
3) $[fX, gY] = f \cdot (Xg)Y - g \cdot (Yf)X + f \cdot g[X, Y]$,
4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

が成り立つ．

証明　上記の性質は，それぞれポアソン括弧積の定義から直接示せる．例えば性質 3)

を証明するには，任意の $h \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}[fX, gY]h &= (fX)((gY)h) - (gY)((fX)h) \\ &= f \cdot X(g \cdot Yh) - g \cdot Y(f \cdot Xh) \\ &= f \cdot (Xg)(Yh) + f \cdot g \cdot X(Yh) - g \cdot (Yf)(Xh) - g \cdot f \cdot Y(Xh) \\ &= (f(Xg) \cdot Y - g(Yf) \cdot X + f \cdot g[X, Y])h\end{aligned}$$

となる．したがって性質 3) が成り立つ． □

性質 4) は**ヤコビの恒等式**とよばれる．

次に，局所座標を用いて $[X, Y]$ を計算する．$(U; u^i)$ を多様体 M 上の局所座標系とする．このとき，

$$X|_U = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad Y|_U = \sum_{i=1}^m \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{4.7}$$

としてよい．ここで，ξ^i, η^i は U 上の滑らかな関数である．$\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right] = 0$ $(1 \leq i, j \leq m)$ なので，定理 4.2 の性質 3) より

$$[X, Y]|_U = [X|_U, Y|_U] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i}\right) \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{4.8}$$

が成り立つ．したがって，$[X, Y]$ は，M 上の滑らかな接ベクトル場である．

定義 4.2 M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 X と，点 $p \in M$ をとる．このとき，$X_p = 0$ ならば p を X の**特異点**という．

場合によっては，特異点 p の近傍でベクトル場 X の性質は複雑になることもある (例えば Chern 1967(a) を参照)．滑らかな接ベクトル場の特異性は，多様体の位相的な性質と密接な関係がある (第 5 章の定理 4.1 の系を参照)．例えば，偶数次元球上で特異点をもたない滑らかな接ベクトル場は存在しないが，トーラス上にはそういったベクトル場が存在する．

特異点でない点における近傍での滑らかな接ベクトル場の振舞いは単純である．次の定理が成り立つ．

定理 4.3 X を多様体 M 上の任意の滑らかな接ベクトル場としよう．点 $p \in M$ で $X_p \neq 0$ ならば，

$$X|_W = \frac{\partial}{\partial w^1} \tag{4.9}$$

をみたすような局所座標系 $(W; w^i)$ が存在する．

証明　定理 4.1 により，

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{4.10}$$

が成り立つような局所座標系 $(U; u^i)$, $u^i(p) = 0$ が存在する．ここで，ξ^i は U 上の滑らかな関数である．$X_p \neq 0$ なので $\xi^1(p) \neq 0$ としてよい．関数 ξ^1 の連続性により，$\xi^1|_U \neq 0$ となるような点 p の十分小さな近傍 U をとることができる．常微分方程式系

$$\frac{du^\alpha}{du^1} = \frac{\xi^\alpha(u^1, \dots, u^m)}{\xi^1(u^1, \dots, u^m)}, \quad 2 \leq \alpha \leq m \tag{4.11}$$

を考えよう．ここで，u^1 は独立変数であり，$u^\alpha\,(2 \leq \alpha \leq m)$ は未知関数である．常微分方程式の理論より (Hurewicz 1966 参照)，$\{(u^1, \dots, u^m) \big| \, |u^i| < \delta\} \subset U$ で，任意の初期値 $(v^2, \dots, v^m)$, $|v^\alpha| < \delta$, $2 \leq \alpha \leq m$ に対して，微分方程式 (4.11) が一意的解

$$u^\alpha = \varphi^\alpha(u^1; v^2, \dots, v^m), \quad -\delta < u^1 < \delta \tag{4.12}$$

をもち，さらに初期条件

$$\varphi^\alpha(0; v^2, \dots, v^m) = v^\alpha \tag{4.13}$$

をみたす正数 δ が存在する．ここで，関数 φ^α は u^1 と初期値 v^α の滑らかな関数である．

次の座標変換

$$\begin{cases} u^1 = v^1, \\ u^\alpha = \varphi^\alpha(v^1; v^2, \dots, v^m), \quad 2 \leq \alpha \leq m \end{cases} \tag{4.14}$$

を考えよう．そのヤコビ行列は，

$$\left.\frac{\partial(u^1, \dots, u^m)}{\partial(v^1, \dots, v^m)}\right|_{v^1=0} = 1 \tag{4.15}$$

である．したがって，関数 $v^i\,(1 \leq i \leq m)$ が局所座標系になる点 p の近傍 $W \subset U$ が存在する．この座標系で

$$\begin{aligned} X|_W &= \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^1} \\ &= \xi^1 \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial v^1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

が成り立つ．関数 $w^i\,(1 \leq i \leq m)$ を

$$\begin{cases} w^1 = \displaystyle\int_0^{v^1} \frac{dv^1}{\xi^1}, \\ w^\alpha = v^\alpha, \qquad 2 \leq \alpha \leq m \end{cases} \tag{4.17}$$

で定義すると，w^i は W の座標系で，

$$X|_W = \frac{\partial}{\partial w^1}$$

とかける． □

定理 4.3 の一般化は以下のようになる．任意の点 $p \in M$ に対して，接空間 T_p の h 次元部分空間 $L^h(p)$ が与えられているとしよう．すなわち，部分空間 L^h は，多様体 M の h 次元接部分空間場とする．要するに，任意の点 $p \in M$ に対して 1 次独立な h 個の滑らかな接ベクトル場をもつ点 $p \in M$ の近傍 U が存在するとする (すなわち，任意の点 $q \in U$ で，$L^h(q)$ は $X_1(q), \dots, X_h(q)$ で張られている)．このとき，L^h を h 次元**滑らかな接部分空間場**，または，M 上の h 次元**滑らかな分布** (ディストリビューション) といい，

$$L^h\big|_U = \{X_1, \dots, X_h\} \tag{4.18}$$

で表される．

h 次元分布 L^h はベクトル場 $X_1, \dots, X_h$ により張られているが，それらは一意的に決まるものではない．U 上で滑らかで非退化，つまり $\det(a_\alpha^\beta) \neq 0$ となる関数 a_α^β に対して

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{h} a_\alpha^\beta X_\beta, \qquad 1 \leq \alpha \leq h \tag{4.19}$$

とおくと，$L^h|_U$ は $Y_1, \dots, Y_h$ でも張られる．すなわち，

$$L^h|_U = \{Y_1, \dots, Y_h\} \tag{4.20}$$

である．このとき，次の問題が起こる．M 上の h 次元分布 L^h に対して，

$$L^h|_W = \left\{ \frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h} \right\} \tag{4.21}$$

をみたすような座標系 $(W; w^i)$ が存在するのか?

もし (4.21) が成り立つならば，接ベクトル場 X_α は

$$X_\alpha = \sum_{\beta=1}^{h} a_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial w^\beta} \tag{4.22}$$

とかける．$\left[\frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \frac{\partial}{\partial w^\beta}\right] = 0$ であるので，交換子積は

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{h} C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \tag{4.23}$$

となる．ここで，

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{\delta,\eta=1}^{h} \left(a^{\delta}_{\alpha} \frac{\partial a^{\eta}_{\beta}}{\partial w^{\delta}} - a^{\delta}_{\beta} \frac{\partial a^{\eta}_{\alpha}}{\partial w^{\delta}} \right) (a^{-1})^{\gamma}_{\eta}$$

であり，a^{-1} は行列 $a = (a^{\alpha}_{\beta})$ の逆行列を表す．明らかに，接ベクトル場 $Y_1, \ldots, Y_h$ が同じ h 次元分布 L^h を張るとき，$X_\alpha\,(1 \leq \alpha \leq h)$ が (4.23) をみたしていれば，$[Y_\alpha, Y_\beta]$ は，Y_γ の 1 次結合でかける．

定義 4.3　ベクトル場 $X_\alpha\,(\alpha = 1, 2, \ldots, h)$ で張られた h 次元分布を L^h としよう．このとき，$[X_\alpha, X_\beta]$ が $X_\gamma\,(1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq h)$ の 1 次結合でかけるときに，分布 L^h は**フロベニウスの条件**をみたすという．

定理 4.4　$L^h = \{X_1, \ldots, X_h\}$ は開集合 U 上の h 次元分布としよう．このとき，

$$L^h\big|_W = \left\{ \frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h} \right\}$$

をみたす局所座標系 $(W; w^i)$，$W \subset U$ が存在するための必要十分条件は，L^h がフロベニウスの条件をみたすことである．

通常この定理は**フロベニウスの定理**とよばれる．

証明　必要条件はすでに証明されている．

分布の次元 h に関する数学的帰納法を用いて十分条件を証明しよう．$h = 1$ のときは，定理 4.3 より明らかである．次に，$(h-1)$ 次元分布に関して十分条件は成り立つと仮定しよう．分布 L^h は，U 上の h 個の 1 次独立な接ベクトル場 $X_1, \ldots, X_h$ によって張られていて，

$$[X_\alpha, X_\beta] \equiv 0 \bmod X_\gamma, \quad 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq h$$

が成り立っているとしよう．

定理 4.3 より，

$$X_h = \frac{\partial}{\partial y^h} \tag{4.24}$$

が成り立つ座標系 $(y^1, \ldots, y^m)$ が存在する．ここで，

$$X'_\lambda = X_\lambda - (X_\lambda y^h) X_h \tag{4.25}$$

とおくと，

$$X'_\lambda y^h = 0, \quad X_h y^h = 1 \tag{4.26}$$

が成り立つ．ただし，$1 \leq \lambda \leq h-1$ とする (今後 λ はこの範囲とする)．分布 $L^h =$

$\{X'_1, \dots, X'_{h-1}, X_h\}$ なので，これらの h 個の接ベクトルはフロベニウスの条件をみたす．したがって，

$$[X'_\lambda, X'_\mu] \equiv a_{\lambda\mu} X_h \bmod X'_\nu, \quad 1 \le \lambda, \mu, \nu \le h-1$$

とおくことができる．上式の両辺を関数 y^h に作用させると $a_{\lambda\mu} = 0$ となる．したがって，$(h-1)$ 次元分布 $L'^{h-1} = \{X'_1, \dots, X'_{h-1}\}$ はフロベニウスの条件をみたす．帰納法の仮定により，

$$L'^{h-1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}} \right\} \tag{4.27}$$

となる点 p の局所座標系 $(z^1, \dots, z^m)$ が存在する．ベクトル $\frac{\partial}{\partial z^\lambda}$ は，ベクトル X'_μ に非退化 1 次変換でうつるので，(4.26) より，

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} y^h = 0 \tag{4.28}$$

を得る．分布 $L^h = \left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}, X_h \right\}$ なので，フロベニウスの条件より

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h \right] \equiv b_\lambda X_h \bmod \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

が成り立つ．この両辺を関数 y^h に作用させると，$b_\lambda = 0$ となる．したがって，

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h \right] = \sum_{\mu=1}^{h-1} C_\lambda^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} \tag{4.29}$$

が成り立つ．局所座標系 $(z^1, \dots, z^m)$ を用いると，ベクトル X_h が

$$X_h = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{4.30}$$

とかけるので，

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h \right] = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi^i}{\partial z^\lambda} \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{4.31}$$

が成り立つ．上式と (4.29) を比較すると，

$$\frac{\partial \xi^\rho}{\partial z^\lambda} = 0, \quad 1 \le \lambda \le h-1, \quad h \le \rho \le m \tag{4.32}$$

が得られる．これより，ξ^ρ は $z^h, \dots, z^m$ のみの関数である．ここで，

$$X'_h = \sum_{\rho=h}^m \xi^\rho \frac{\partial}{\partial z^\rho} \tag{4.33}$$

とおくと，分布 L^h は

$$L^h = \left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}, X'_h \right\}$$

となる．定理 4.3 より，

$$X'_h = \frac{\partial}{\partial w^h} \tag{4.34}$$

となる局所座標系 $(z^h, \ldots, z^m)$ から $(w^h, \ldots, w^m)$ への座標変換が存在する．この座標変換は $z^1, \ldots, z^{h-1}$ を含まない．ここで，$w^\lambda = z^\lambda\,(1 \leq \lambda \leq h-1)$ とおくと，$(w^1, \ldots, w^m)$ は，点 p における局所座標系となり，この局所座標系で

$$L^h = \left\{ \frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h} \right\}$$

となる．□

注意．さまざまな応用の場面では，フロベニウスの定理を外微分形式を用いた双対形式で表すと便利である (第 3 章の定理 2.4 参照).

2

多重線形代数

§2-1　テンソル積

本章では，可微分多様体のさらに進んだ勉強をするために必要な代数的準備をしよう．まず，ベクトル空間の定義からはじめる．

$\mathbb{F}$ を体とする．以後 $\mathbb{F}$ は実数体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数体 $\mathbb{C}$ とする．体 $\mathbb{F}$ 上の**ベクトル空間** V とは，次の 2 つの演算をもつ集合である．

1) 加法，
2) $\mathbb{F}$ に関するスカラー倍 ($\mathbb{F}$ の元は左より掛ける)．

ここで，集合 V はこれらの演算に関して次の二つの条件をみたすとする．

1) 集合 V は加法に関して可換群であり，その単位元は 0 (零ベクトル) で表す，
2) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x, y \in V$ に対して
   a) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,
   b) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,
   c) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
   d) $0 \cdot x = 0, \quad 1 \cdot x = x$

   が成り立つ．

集合 V の要素を**ベクトル**，体 $\mathbb{F}$ の元を**スカラー**という．

集合 V に n 個の要素 $a_1, \ldots, a_n$ が存在し，V の任意の要素がこれら n 個の要素の 1 次結合で一意的に表せるとき，V を n **次元**ベクトル空間という．

この $\{a_1, \ldots, a_n\}$ をベクトル空間の**基底**という．基底を一組指定することにより，V は順序づけられた n 個の組 $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$, $\alpha^i \in \mathbb{F}$ のベクトル空間とみなすことができる．

注意. もし，体 $\mathbb{F}$ を環 R で置き換えると，環 R 上のベクトル空間を同様に定義できる．環 R 上のベクトル空間は (左)R **加群**とよばれる．例えば，§3-1 で定義されるベクトル束の切断は C^∞ 加群である．

関数 $f: V \longrightarrow \mathbb{F}$ を V 上の $\mathbb{F}$ 値関数とする．このとき任意の $v_1, v_2 \in V$ と $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{F}$ に対して

$$f\left(\alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2\right) = \alpha^1 f(v_1) + \alpha^2 f(v_2) \tag{1.1}$$

が成り立つとき，f は V 上の $\mathbb{F}$ 値**線形関数**という．V 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数 f, g と $\alpha \in \mathbb{F}$ に対して，明らかに $f+g$ と αf も V 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数である．したがって，V 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数の全体は $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間となる．これを V の**双対ベクトル空間**とよび，V^* で表す．

$\mathbb{F}$ 上の n 次元ベクトル空間 V に対して，その双対ベクトル空間 V^* も $\mathbb{F}$ 上の n 次元ベクトル空間となる．なぜならば，$\{a_1, \ldots, a_n\}$ を V の基底とし，

$$v = \sum_{i=1}^n v^i a_i \in V, \qquad f \in V^*$$

とすると，

$$f(v) = \sum_{i=1}^n v^i f(a_i) \tag{1.2}$$

が成り立つ．したがって，線形関数 f は指定された基底に対して，値 $f(a_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ により定められる．そこで

$$a^{*i}(a_j) = \delta^i_j, \quad 1 \leq j \leq n \tag{1.3}$$

をみたすように線形関数 $a^{*i} \in V^*$ $(1 \leq i \leq n)$ を定義すれば，$a^{*i}(v) = v^i$ であり，

$$f(v) = \sum_{i=1}^n f_i v^i = \sum_{i=1}^n f_i a^{*i}(v),$$

$$f = \sum_{i=1}^n f_i a^{*i} \tag{1.4}$$

となる．ここで $f_i = f(a_i)$ とおいた．

(1.4) により，V^* の任意の元は $\{a^{*i},\ 1 \leq i \leq n\}$ の 1 次結合でかくことができる．その 1 次結合の表現は一意的であることは容易にわかる．よって，$\{a^{*i},\ 1 \leq i \leq n\}$ は V^* の基底となる．これを $\{a_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ の**双対基底**とよぶ．

注意．ベクトル空間 V の一つの固定した基底 $\{a_1,\ldots,a_n\}$ に対して，a^{*i} は V 上の座標関数である．実際 $a^{*i}(v)=v^i$ となり，$a^{*i}(v)$ はその基底に関するベクトル v の i 成分である．

V^* と V は互いに双対空間であるので，内積を

$$\langle v, v^*\rangle = v^*(v), \qquad v\in V, \quad v^*\in V^* \tag{1.5}$$

で定義できる．よって，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $V\times V^*$ 上の $\mathbb{F}$ 値関数となり，各変数に関して線形である．すなわち，任意の $v,v_1,v_2\in V$，$v^*,v^{*1},v^{*2}\in V^*$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ に対して

$$\begin{cases} \langle \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\ ,\ v^*\rangle \ = \ \alpha_1\langle v_1,v^*\rangle+\alpha_2\langle v_2,v^*\rangle, \\ \langle v\ ,\ \alpha_1 v^{*1}+\alpha_2 v^{*2}\rangle \ = \ \alpha_1\langle v,v^{*1}\rangle+\alpha_2\langle v,v^{*2}\rangle \end{cases} \tag{1.6}$$

が成り立つ．

ベクトル $v\in V$ を一つ固定すると，(1.5) における $\langle v,\cdot\rangle$ は V^* 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数である．逆に，任意の V^* 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数は，あるベクトル V を用いて $\langle v,\cdot\rangle$ とかくことができる．実際，V^* 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数 φ をとり，$v=\sum_{i=1}^{n}\varphi(a^{*i})a_i$ とおくと，任意の $v^*\in V$ に対して

$$\begin{aligned} \langle v,v^*\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\varphi(a^{*i})\langle a_i,v^*\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} v^*(a_i)\cdot\varphi(a^{*i}) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} v^*(a_i)\cdot a^{*i}\right) \\ &= \varphi(v^*) \end{aligned} \tag{1.7}$$

が成り立つ．したがって，V を V^* 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数の全体がつくるベクトル空間とみなすことができる．要するに V は V^* の双対空間である．

上記の議論を一般化しよう．ここで V,W,Z を体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間としよう．

定義 1.1 写像 $f:V\longrightarrow Z$ が**線形**であるとは，任意の $v_1,v_2\in V$，$\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{F}$ に対して，

$$f(\alpha^1 v_1+\alpha^2 v_2)=\alpha^1 f(v_1)+\alpha^2 f(v_2) \tag{1.8}$$

が成り立つときをいう．また，写像 $f : V \times W \longrightarrow Z$ が**双線形**であるとは，任意の $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\alpha^1, \alpha^2 \in F$ に対して

$$\begin{cases} f(\alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2\ ,\ w) = \alpha^1 f(v_1, w) + \alpha^2 f(v_2, w), \\ f(v\ ,\ \alpha^1 w_1 + \alpha^2 w_2) = \alpha^1 f(v, w_1) + \alpha^2 f(v, w_2) \end{cases} \tag{1.9}$$

が成り立つときをいう．

同様に，$\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 $V_1, \ldots, V_r$ に対して，r **線形写像** $f : V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow Z$ を定義することができる．

ベクトル空間 Z が $\mathbb{F}$ のときは，Z は $\mathbb{F}$ 上の 1 次元ベクトル空間とみなせるので，定義 1.1 における関数はそれぞれ $\mathbb{F}$ 値線形関数，$\mathbb{F}$ 値双線形関数，$\mathbb{F}$ 値 r 線形関数という．

ここで，$V_1 \times \cdots \times V_r$ から Z への r 線形写像の全体を $\mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_r; Z)$ と表す．任意の $f, g \in \mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_r; Z)$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq r)$ に対して

$$\begin{cases} (f+g)(v_1, \ldots, v_r) = f(v_1, \ldots, v_r) + g(v_1, \ldots, v_r), \\ \quad (\alpha f)(v_1, \ldots, v_r) = \alpha \cdot f(v_1, \ldots, v_r) \end{cases} \tag{1.10}$$

によって加法とスカラー倍を定義する．

この定義から，$f+g$, αf は $\mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_r; Z)$ の元である．集合 $\mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_r)$ がその二つの演算に関して $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間となるのは明らかである．

ベクトル空間 $\mathfrak{L}(V; Z)$ の構造は簡単である．いま $\{a_1, \ldots, a_n\}$ を V の基底，$\{b_1, \ldots, b_m\}$ を Z の基底とするとき，$f \in \mathfrak{L}(V; Z)$ は基底 $\{a_i\}$ を用いて

$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} b_j, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.11}$$

とかける．このとき，f は $n \times m$ 行列 (f_{ij}) で表すことができる．さらに空間 $\mathfrak{L}(V; Z)$ は $\mathbb{F}$ の元を要素とする $n \times m$ 行列の全体のなすベクトル空間と同形であることを示すのは容易である．それを

$$\mathfrak{L}(V; Z) = \mathrm{Hom}(V; Z) \tag{1.12}$$

と表す．

次に，$V \times W$ 上の双線形写像をどのようにして線形写像とみなすのかという問題を考える．この問題を解くため，まず任意の双線形写像 $f : V \times W \longrightarrow Z$

に対して，

$$f = g \circ h : V \times W \longrightarrow Z \tag{1.13}$$

をみたすただ一つの線形写像 $g : Y \longrightarrow Z$ が存在するような V と W のみに依存するベクトル空間 Y と，双線形写像 $h : V \times W \longrightarrow Y$ をつくればよい．すなわち，図形

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\ h\ } & Y \\ & \searrow^{f} & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \tag{1.14}$$

は可換である．

上記で得られたベクトル空間 Y を V と W の**テンソル積**という．

これを正確に記述するためには，まず双対空間 V^* と W^* のテンソル積を考えよう．任意の $v^* \in V^*$，$w^* \in W^*$ に対して線形関数 v^* と w^* のテンソル積 $v^* \otimes w^*$ を

$$\begin{aligned} v^* \otimes w^*(v, w) &= v^*(v) \cdot w^*(w) \\ &= \langle v, v^* \rangle \cdot \langle w, w^* \rangle \end{aligned} \tag{1.15}$$

で定義する．ここで $v \in V, w \in W$ である．このとき $v^* \otimes w^*$ は $V \times W$ 上の双線形写像である，すなわち $v^* \otimes w^* \in \mathfrak{L}(V, W; \mathbb{F})$ となる．演算式 $\otimes$ は $V^* \times W^*$ から $\mathfrak{L}(V, W; \mathbb{F})$ への双線形写像である．実際，任意の $v_1^*, v_2^* \in V^*$，$w^* \in W^*$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ に対して

$$\begin{aligned} (\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) \otimes w^*(v, w) &= \langle v, \alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* \rangle \cdot \langle w, w^* \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v, v_1^* \rangle \langle w, w^* \rangle + \alpha_2 \langle v, v_2^* \rangle \langle w, w^* \rangle \\ &= (\alpha_1 (v_1^* \otimes w^*) + \alpha_2 (v_2^* \otimes w^*))(v, w) \end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち

$$(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) \otimes w^* = \alpha_1 (v_1^* \otimes w^*) + \alpha_2 (v_2^* \otimes w^*) \tag{1.16}$$

となる．

同様に，演算式 $\otimes$ は第 2 成分に関して線形であることもわかる．

ベクトル空間 V^* と W^* のテンソル積 $V^* \otimes W^*$ は，任意の $v^* \in V^*, w^* \in W^*$ でつくられるすべての $v^* \otimes w^*$ で生成されるベクトル空間である．このテンソル積 $V^* \otimes W^*$ は $\mathfrak{L}(V, W; \mathbb{F})$ の部分空間である．ここで，$V^* \otimes W^*$ の任意の元は，単に $v^* \otimes w^*$ の 1 個ではなく，$v^* \otimes w^*$ の形のいくつかの要素の 1 次結合である (そのいくつかの例を考えよ)．単に $v^* \otimes w^*$ でかける $V^* \otimes W^*$ の元は，**可約**という．

実際，V^* と W^* の基底 $\{a^{*i}\}_{1 \le i \le n}$，$\{b^{*j}\}_{1 \le j \le m}$ をそれぞれとると，演算 $\otimes$ は双線形なので

$$v^* \otimes w^* = \sum_{i,j} v^*(a_i) w^*(b_j) a^{*i} \otimes b^{*j} \tag{1.17}$$

とかける．ここで $\{a_i\}$ と $\{b_j\}$ は，それぞれ V と W の双対基底である．したがって，$V^* \otimes W^*$ の任意の元は $a^{*i} \otimes b^{*j}$ の 1 次結合として表すことができる．元 $a^{*i} \otimes b^{*j}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ は 1 次独立なので，それらは $V^* \otimes W^*$ の基底となる．したがって，$V^* \otimes W^*$ は $(n \times m)$ 次元ベクトル空間となる．

同様に，任意の $\mathbb{F}$ 値双線形写像 $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{F}$ は，元 $a^{*i} \otimes b^{*j}$ の 1 次結合としてかける．したがって

$$V^* \otimes W^* = \mathfrak{L}(V, W; \mathbb{F})$$

である．

ベクトル空間 V と W はそれぞれ V^* と W^* の双対空間であるので，テンソル積 $V \otimes W$ を上記と同様に定義できる．したがって

$$V \otimes W = \mathfrak{L}(V^*, W^*; \mathbb{F})$$

である．

ここで内積を

$$\langle v \otimes w, v^* \otimes w^* \rangle = \langle v, v^* \rangle \cdot \langle w, w^* \rangle \tag{1.18}$$

と定義すれば，$V \otimes W$ は $V^* \otimes W^*$ の双対空間となる．基底を用いると

$$\begin{aligned} \langle a_i \otimes b_j, a^{*p} \otimes b^{*q} \rangle &= \delta_i^p \delta_j^q \\ &= \begin{cases} 1, & (i,j) = (p,q) \text{ のとき}, \\ 0, & (i,j) \neq (p,q) \text{ のとき}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.19}$$

したがって，$\{a_i \otimes b_j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ と $\{a^{*i} \otimes b^{*j},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ は双対基底であり，

$$V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$$

が成り立つ．

定理 1.1 任意の $v \in V,\ w \in W$ に対して

$$h(v, w) = v \otimes w \tag{1.20}$$

で定義されるテンソル積から得られる双線形写像を $h : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ とするとき，次が成り立つ．任意の双線形写像 $f : V \times W \longrightarrow Z$ に対して

$$f = g \circ h : V \times W \longrightarrow Z \tag{1.21}$$

をみたすような線形写像 $g : V \otimes W \longrightarrow Z$ が一意的に存在する．

証明　$V \otimes W$ の任意の基底 $\{a_i \otimes b_j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ に対して

$$g(a_i \otimes b_j) = f(a_i, b_j), \qquad 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq m \tag{1.22}$$

と線形写像 $g : V \otimes W \longrightarrow Z$ を定義する．ベクトル

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i a_i \in V, \qquad w = \sum_{j=1}^{m} w^j b_j \in W$$

をとれば，

$$g(v \otimes w) = \sum_{i,j} v^i w^j g(a_i \otimes b_j) = \sum_{i,j} v^i w^j f(a_i, b_j) = f(v, w)$$

である．したがって，

$$f = g \circ h : V \times W \longrightarrow Z$$

となり，写像 g は一意的であることもわかる．　□

系 1 ベクトル空間 $\mathcal{L}(V, W; Z)$ とベクトル空間 $\mathcal{L}(V \otimes W; Z)$ は同形である．

証明　(1.20) で定義された写像 h に対して，写像

$$\varphi : \mathcal{L}(V \otimes W; Z) \longrightarrow \mathcal{L}(V, W; Z)$$

を

$$\varphi(g) = g \circ h, \quad g \in \mathcal{L}(V \otimes W; Z) \tag{1.23}$$

をみたすようにとる．すると，定理 1.1 より写像 φ は 1 対 1 で，全射である．一方，φ は線形なので，φ は同形写像であることがわかる．　□

線形関数の 2 個のテンソル積の演算を多重線形関数のテンソル積へ拡張しよう．任意の $f \in \mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_s; \mathbb{F}), g \in \mathfrak{L}(W_1, \ldots, W_r; \mathbb{F})$ に対して．そのテンソル積 $f \otimes g$ を

$$f \otimes g(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_r) = f(v_1, \ldots, v_s) \cdot g(w_1, \ldots, w_r) \tag{1.24}$$

で定義する．ここで，$v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq s)$，$w_j \in W_j$ $(1 \leq j \leq r)$ である．このとき，$f \otimes g$ は $V_1 \times \cdots \times V_s \times W_1 \times \cdots \times W_r$ 上の $\mathbb{F}$ 値 $(r+s)$ 線形関数であるので，テンソル積 $\otimes$ は，$\mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_s; \mathbb{F}) \times \mathfrak{L}(W_1, \ldots, W_r; \mathbb{F})$ から $\mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_s, W_1, \ldots, W_r; \mathbb{F})$ への双線形写像である．

定理 1.2 テンソル積 $\otimes$ は結合的である．すなわち，任意の $\varphi \in \mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_s; \mathbb{F})$，$\psi \in \mathfrak{L}(W_1, \ldots, W_r; \mathbb{F})$，$\xi \in \mathfrak{L}(Z_1, \ldots, Z_t; \mathbb{F})$ に対して，

$$(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi = \varphi \otimes (\psi \otimes \xi) \tag{1.25}$$

が成り立つ．

証明　簡単のため $s = r = t = 1$ の場合のみを考えよう．任意の s, r, t についても同様に示すことができる．任意の $v \in V_1$，$w \in W_1$，$z \in Z_1$ に対して

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi(v, w, z) &= \varphi \otimes \psi(v, w) \cdot \xi(z) \\ &= \varphi(v) \cdot \psi(w) \cdot \xi(z)\end{aligned}$$

である．同様に

$$\varphi \otimes (\psi \otimes \xi)(v, w, z) = \varphi(v) \cdot \psi(w) \cdot \xi(z).$$

したがって，

$$(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi = \varphi \otimes (\psi \otimes \xi)$$

となり，$\varphi \otimes \psi \otimes \xi$ は定義できる．これを三つの線形写像のテンソル積という．　□

任意の $v \in V$，$w \in W$，$z \in Z$ に対してテンソル積 $v \otimes w \otimes z$ で生成されるベクトル空間を $V \otimes W \otimes Z$ で表し，ベクトル空間 V, W, Z の**テンソル積**という．ここで，v, w, z はそれぞれ双対ベクトル空間 V^*, W^*, Z^* 上の $\mathbb{F}$ 値線形関数とみなす．

同様に，$\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 $V_1, \ldots, V_s$ に対して，そのテンソル積 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_s$ を定義できる．V_i の基底を

$$\left\{a_1^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}\right\}$$

としたとき，

$$a_{j_1}^{(1)} \otimes a_{j_2}^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_{j_s}^{(s)}, \quad 1 \leq j_i \leq n_i, \ i = 1, \ldots, s \tag{1.26}$$

は，$V_1 \otimes \cdots \otimes V_s$ の基底となる．したがって，

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_s) = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdot \ \cdots \ \cdot \dim V_s \tag{1.27}$$

が成り立つ．さらに，

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_s = \mathfrak{L}(V_1^*, \ldots, V_s^*; \mathbb{F})$$

であることも容易にわかる．

定理 1.3 テンソル積 $\otimes$ によって定義される s 線形写像 $h : V_1 \times \cdots \times V_s \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_s$ を考える．すなわち，任意の $v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq s)$ に対して

$$h(v_1, \ldots, v_s) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \tag{1.28}$$

である．このとき，任意の $f \in \mathfrak{L}(V_1, \ldots, V_s; Z)$ に対して

$$f = g \circ h : V_1 \times \cdots \times V_s \longrightarrow Z \tag{1.29}$$

をみたす線形写像 $g \in \mathfrak{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_s; Z)$ は一意的に存在する．

証明は定理 1.1 の場合と同様であるので，読者にまかせる．

§2-2　テンソル

前節では一般のテンソル積の概念について述べた．微分幾何学では，ベクトル空間とその双対ベクトル空間とのテンソル積が重要な役割を果す．

定義 2.1 V を $\mathbb{F}$ 上の n 次元ベクトル空間とし，その双対ベクトル空間を V^* とするとき，テンソル積

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{ 個}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{ 個}} \tag{2.1}$$

の要素を (r, s) **型テンソル**といい，r を**反変次数**，s を**共変次数**という．

特に V_0^r の元を r **次の反変テンソル**といい，V_s^0 の元を s **次の共変テンソル**という．ここで，$V_0^0 = \mathbb{F}$，$V_0^1 = V$，$V_1^0 = V^*$ である．V の元を**反変テンソル**と

いい，V^* の元を**コベクトル**という．

注意．一般的に，テンソル積 V_s^r において V と V^* の元を混同することも当然考えられるが，同値性が成り立つので (2.1) のような表現はよく用いられる．

§2-1 によれば，$\dim V_s^r = n^{r+s}$ であり，

$$V_s^r = \mathcal{L}(\underbrace{V^*, \ldots, V^*}_{r\ 個}, \underbrace{V, \ldots, V}_{s\ 個}; \mathbb{F})$$

である．ベクトル空間 V と双対ベクトル空間 V^* の基底をそれぞれ $\{e_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\{e^{*i}\}$ $(1 \leq i \leq n)$ とする．このとき，

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s}\ , \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_r, k_1, \ldots, k_s \leq n \tag{2.2}$$

は V_s^r の基底になる．したがって，(r, s) 型のテンソル x は

$$x = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_r \\ k_1 \cdots k_s}} x_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s} \tag{2.3}$$

のように一意的に表すことができる．ここで，$x_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r}$ を基底 (2.2) に関するテンソル x の**成分**という．よって，

$$\begin{aligned} x_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} &= x(e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_r}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_s}) \\ &= \langle e^{*i_1} \otimes \cdots \otimes e^{*i_r} \otimes e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_s}, x \rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

は明らかである．

テンソル計算において，アインシュタインの縮約がよく用いられる．すなわち，テンソルの成分の上付と下付の添字が同じときは，定義域すべてに渡る和を表し，和の記号は略す．例えば，(2.3) は

$$x = x_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s} \tag{2.5}$$

とかける．

ここで，ベクトル空間 V の基底を変えると，テンソルの成分はどう変わるかをみよう．ベクトル空間 V と V^* 双対ベクトル空間の別の基底をそれぞれ $\{\overline{e}_i\}_{i \leq i \leq n}$ と $\{\overline{e}^{*i}\}_{1 \leq i \leq n}$ とする．このとき，基底 $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を用いて，

$$\overline{e}_i = \alpha_i^j e_j \tag{2.6}$$

とかける．ここで $\alpha = (\alpha_i^j)$ は $n \times n$ 正則行列である．

同様に，双対基底 $\{e^{*i}\}_{1 \leq i \leq n}$ を用いて，

$$\overline{e}^{*i} = \beta_j^i e^{*j} \tag{2.7}$$

とかける．ここで，$\beta = (\beta_i^j)$ は α の逆行列である．すなわち，

$$\alpha_i^j \beta_j^k = \beta_i^j \alpha_j^k = \delta_i^k \tag{2.8}$$

が成り立つ．

この新しい基底を用いたテンソル x の成分を $\overline{x}_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r}$ とすると，

$$\begin{aligned} x &= \overline{x}_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} \overline{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{e}_{i_r} \otimes \overline{e}^{*k_1} \otimes \cdots \otimes \overline{e}^{*k_s} \\ &= \overline{x}_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} \alpha_{i_1}^{j_1} \cdots \alpha_{i_r}^{j_r} \beta_{l_1}^{k_1} \cdots \beta_{l_s}^{k_s} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \otimes e^{*l_1} \otimes \cdots \otimes e^{*l_s} \end{aligned}$$

とかけ，

$$x_{l_1 \cdots l_s}^{j_1 \cdots j_r} = \overline{x}_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} \alpha_{i_1}^{j_1} \cdots \alpha_{i_r}^{j_r} \beta_{l_1}^{k_1} \cdots \beta_{l_s}^{k_s} \tag{2.9}$$

が得られる．古典的なテンソル解析では，(2.9) によってテンソルが定義される．

したがって，(r, s) 型テンソルの全体 V_s^r はベクトル空間となる．よって，そのベクトル空間における和とスカラー倍が定義される．さらに，積や縮約といった演算も可能である．

定義 2.2　x を (r_1, s_1) 型テンソル，y を (r_2, s_2) 型テンソルとしよう．このとき，**テンソル積** $x \otimes y$ は $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ 型テンソルで

$$\begin{aligned} x \otimes y(v^{*1}, \ldots, v^{*r_1+r_2}, v_1, \ldots, v_{s_1+s_2}) &= x(v^{*1}, \ldots, v^{*r_1}, v_1, \ldots, v_{s_1}) \\ &\quad \cdot y(v^{*r_1+1}, \ldots, v^{*r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \ldots, v_{s_1+s_2}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

と定義する．

基底を用いると，$x \otimes y$ の成分は x の成分と y の成分の積である．すなわち，

$$(x \otimes y)_{k_1 \cdots k_{s_1+s_2}}^{i_1 \cdots i_{r_1+r_2}} = x_{k_1 \cdots k_{s_1}}^{i_1 \cdots i_{r_1}} \cdot y_{k_{s_1+1} \cdots k_{s_1+s_2}}^{i_{r_1+1} \cdots i_{r_1+r_2}} \tag{2.11}$$

が成り立つ．

§2-1 に述べたように，テンソル積は分配法則と結合法則が成り立つ (定理 1.2 参照)．

定義 2.3 添字を λ, μ $(1 \leq \lambda \leq r;\ 1 \leq \mu \leq s)$ としよう．任意の可約 (r, s) 型テンソル

$$x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \cdots \otimes v^{*s} \in V_s^r \tag{2.12}$$

に対して，

$$C_{\lambda\mu}(x) = \langle v_\lambda, v^{*\mu} \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v}_\lambda \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \cdots \otimes \widehat{v}^{*\mu} \otimes \cdots \otimes v^{*s} \tag{2.13}$$

とおく．ここで，“$\widehat{v}_\lambda$” は v_λ を除く意味で使用する．このとき，$C_{\lambda\mu}(x) \in V_{s-1}^{r-1}$ となる．したがって，テンソルの縮約写像とよばれる写像 $x \mapsto C_{\lambda\mu}(x)$ を線形的に拡張することにより，ベクトル空間の**テンソル縮約**写像とよばれる線形写像 $C_{\lambda\mu} : V_s^r \mapsto V_{s-1}^{r-1}$ が定義される．

成分を用いてテンソル x を

$$x = x_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s} \tag{2.14}$$

とかくとき，テンソル縮約は

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu}(x) &= x_{k_1 \cdots k_s}^{i_1 \cdots i_r} C_{\lambda\mu}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s}) \\ &= x_{k_1 \cdots k_{\mu-1}\ j\ k_\mu \cdots k_{s-1}}^{i_1 \cdots i_{\lambda-1}\ j\ i_\lambda \cdots i_{r-1}}\ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_{s-1}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

である．成分の視点からみると，テンソル縮約 $C_{\mu\lambda}$ は上付の λ 番目添字と下付の μ 番目添字の和である．縮約はテンソルの次数を下げる基本的な演算なのである．例えば，$x = \xi_j^i e_i \otimes e^{*j}$ を $(1, 1)$ 型テンソルとしよう．このとき，x の縮約テンソルは，行列 (ξ_j^i) のトレース，すなわち $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^i$ となり，座標系のとり方に依存しないスカラーである．

次に，

$$T^r(V) = V_0^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\ \text{個}}$$

としたとき，直和 $T(V) = \sum_{r \geq 0} T^r(V)$ を考えよう．$T(V)$ の元 x は形式和として

$$x = \sum_{r \geq 0} x^r, \quad x^r \in T^r(V) \tag{2.16}$$

とかける．ここで，有限個の元を除いては 0 とする．よって，$T(V)$ は無限次

元ベクトル空間である．分配法則を用いて，テンソルの積は $T(V)$ の積に拡張できるので，ベクトル空間 $T(V)$ はこの積に関して代数となり，V の**テンソル代数**とよぶ．

同様に，双対ベクトル空間 V^* のテンソル代数は $T(V^*) = \sum_{r \geq 0} V_r^0$ である．

§2-1 でみたように，ベクトル空間 $T^r(V^*)$ と $T^r(V)$ は互いに双対であり，その内積は

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \, , \, v^{*1} \otimes \cdots \otimes v^{*r} \rangle = \langle v_1 \, , \, v^{*1} \rangle \, \cdots \, \langle v_r \, , \, v^{*r} \rangle \tag{2.17}$$

で与えられる．ここで，$v_i \in V$, $v^{*i} \in V^*$ である．自然数 $\{1, \ldots, r\}$ の置換群を $\mathfrak{S}(r)$ とおくと，任意の元 $\sigma \in \mathfrak{S}(r)$ はベクトル空間 $T^r(V)$ の自己同形写像を決める．すなわち，$x \in T^r(V)$ に対して，自己同形写像を

$$\sigma x \left(v^{*1} \ldots v^{*r} \right) = x \left(v^{*\sigma(1)}, \ldots, v^{*\sigma(r)} \right) \tag{2.18}$$

で定義する．ここで $v^{*i} \in V^*$ である．特に，$x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ の場合，

$$\sigma x = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \tag{2.19}$$

が成り立つ．ただし，$\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}(r)$ は σ の逆置換である．

定義 2.4　任意の $x \in T^r(V)$, $\sigma \in \mathfrak{S}(r)$ に対して

$$\sigma x = x \tag{2.20}$$

が成り立つときに，x を r 次の**対称反変テンソル**という．また，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}(r)$ に対して

$$\sigma x = \ \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot x \tag{2.21}$$

が成り立つとき，x を r 次の**交代反変テンソル**という．ただし sgn σ は置換 σ の符号，すなわち，

$$\mathrm{sgn}\ \sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ が偶置換のとき}, \\ -1, & \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases} \tag{2.22}$$

である．

定理 2.1　任意の $x \in T^r(V)$ が対称テンソルとなるための必要十分条件は，そのすべての成分の添字が対称となることである．また，$x \in T^r(V)$ が交代テンソルとなるための必要十分条件は，そのすべての成分の添字が交代となるこ

とである．

証明　ベクトル空間 V の基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ としよう．x が対称テンソルならば，任意の $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ に対して，

$$\begin{aligned} x^{i_1\cdots i_r} &= x(e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_r}) \\ &= \sigma x(e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_r}) \\ &= x(e^{*i_{\sigma(1)}}, \ldots, e^{*i_{\sigma(r)}}) \\ &= x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

が成り立つ．

また，x が交代テンソルならば，任意の $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ に対して，

$$\begin{aligned} x^{i_1\cdots i_r} &= x(e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_r}) \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma x(e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_r}) \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \cdot x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

が成り立つ．

逆も成り立つことは容易にわかる．　□

r 次の対称反変テンソルの全体を $P^r(V)$ とかき，r 次交代反変テンソルの全体を $\Lambda^r(V)$ とかくと，置換 σ は $T^r(V)$ の自己同形なので，対称テンソルの和はまた対称であり，交代テンソルの和はまた交代である．したがって $P^r(V)$ と $\Lambda^r(V)$ は $T^r(V)$ の線形部分空間となる．

定義 2.5　任意の $x \in T^r(V)$ に対して

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} \sigma(x), \tag{2.25}$$

$$A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma(x) \tag{2.26}$$

と定義する．このとき，$S_r(x), A_r(x) \in T^r(V)$ となる．さらに，それぞれの写像 $S_r, A_r : T^r(V) \longrightarrow T^r(V)$ は $T^r(V)$ の自己同形写像となり，それぞれを r 次反変テンソルの**対称化写像**，**交代化写像**という．

定理 2.2　次の式が成り立つ．

$$P^r(V) = S_r(T^r(V)),$$

$$\Lambda^r(V) = A_r(T^r(V)).$$

証明 まず，任意のテンソル x の対称化写像の像は対称テンソルであり，交代化写像の像は交代テンソルであることを示す．任意の $x \in T^r(V)$, $\tau \in \mathfrak{S}(r)$ に対して

$$\begin{aligned}\tau(S_r(x)) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r)} \tau(\sigma(x)) \\ &= S_r(x), \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\tau(A_r(x)) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r)} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau(\sigma(x)) \\ &= \operatorname{sgn} \tau \cdot \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r)} \operatorname{sgn} (\tau \circ \sigma) \cdot (\tau \circ \sigma(x)) \\ &= \operatorname{sgn} \tau \cdot A_r(x) \end{aligned} \tag{2.28}$$

が成り立つ．したがって，$S_r(T^r(V)) \subset P^r(V)$, $A_r(T^r(V)) \subset \Lambda^r(V)$ となる．

さらに，対称テンソルは，対称化写像の作用ではまた対称となり，交代テンソルは，交代化写像の作用でまた交代となる．したがって，

$$P^r(V) = S_r(T^r(V)), \qquad \Lambda^r(V) = A_r(T^r(V))$$

となる． □

上記の対称テンソル，または交代テンソルについての議論は，同様に共変テンソルの場合にも適用できる．r 次対称共変ベクトルの全体を $P^r(V^*)$, r 次交代共変テンソルの全体を $\Lambda^r(V^*)$ と記す．

§2-3 外 積 代 数

E. Cartan により体系的に研究された外微分の方法によって，交代テンソルは多様体の研究において非常に重要な役割を果たす．r 次交代反変テンソルを **r 次の外積ベクトル**，または r 外積ベクトルという．空間 $\Lambda^r(V)$ を，V の r 次の**外積空間**とよぶ．ここで $\Lambda^1(V) = V$, $\Lambda^0(V) = \mathbb{F}$ とする．

さらに重要であるが，二つの外積ベクトルの積はまた外積ベクトルとなるような，外積 (くさび積) とよばれる演算が定義される．

定義 3.1 k 外積ベクトル ξ, l 外積ベクトル η に対して

$$\xi \wedge \eta = A_{k+l}(\xi \otimes \eta) \tag{3.1}$$

としたとき，$\xi \wedge \eta$ は $(k+l)$ 外積ベクトルとなり，ξ と η の**外積** (またはくさ

び積) とよばれる．ここで，A_{k+l} は定義 2.5 における交代化写像である．

定理 3.1 外積は次の性質をもつ．
任意の $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V)$, $\zeta \in \Lambda^h(V)$ に対して，

1) 分配法則 $(\xi_1+\xi_2)\wedge\eta = \xi_1\wedge\eta + \xi_2\wedge\eta$,
$\xi\wedge(\eta_1+\eta_2) = \xi\wedge\eta_1 + \xi\wedge\eta_2$,
2) 反可換法則 $\xi\wedge\eta = (-1)^{kl}\eta\wedge\xi$,
3) 結合法則 $(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta = \xi\wedge(\eta\wedge\zeta)$

が成り立つ．

証明 1) 分配法則は，テンソル積と交代化写像の性質により容易に示される．
2) テンソル $\xi\wedge\eta$ は交代なので，任意の $\tau \in \mathfrak{S}(k+l)$ に対して，

$$\tau(\xi\wedge\eta) = \operatorname{sgn}\tau\cdot\xi\wedge\eta$$

となる．置換 τ を

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ l+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & l \end{pmatrix}$$

に選べば，$\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{kl}$ となる．よって，任意の $v^{*1},\ldots,v^{*k+l} \in V^*$ に対して，

$$\begin{aligned}
\xi\wedge\eta(v^{*1},\ldots,v^{*k+l}) &= (-1)^{kl}\xi\wedge\eta(v^{*\tau(1)},\ldots,v^{*\tau(k+l)}) \\
&= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(k+l)} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)},\ldots,v^{*\sigma\circ\tau(k)})\times \\
&\qquad \eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)},\ldots,v^{*\sigma\circ\tau(k+l)}) \\
&= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(k+l)} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\eta(v^{*\sigma(1)},\ldots,v^{*\sigma(l)})\,\xi(v^{*\sigma(l+1)},\ldots,v^{*\sigma(k+l)}) \\
&= (-1)^{kl}\eta\wedge\xi(v^{*1},\ldots,v^{*k+l}).
\end{aligned}$$

3) 任意の $v^{*1},\ldots,v^{*k+l+h} \in V^*$ に対して，定義より

$$\begin{aligned}
&(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta(v^{*1},\ldots,v^{*k+l+h}) \\
&= \frac{1}{(k+l+h)!}\cdot\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(k+l+h)}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}(k+l)} (\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau)\times \\
&\qquad \xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)},\ldots,v^{*\sigma\circ\tau(k)})\ \eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)},\ldots,v^{*\sigma\circ\tau(k+l)})\times \\
&\qquad \zeta(v^{*\sigma\circ\tau(k+l+1)},\ldots,v^{*\sigma\circ\tau(k+l+h)})
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(k+l+h)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k+l+h)} \Big(\operatorname{sgn} \sigma \cdot \xi(v^{*\sigma(1)}, \dots, v^{*\sigma(k)}) \times \\ \eta(v^{*\sigma(k+1)}, \dots, v^{*\sigma(k+l)})\ \zeta(v^{*\sigma(k+l+1)}, \dots, v^{*\sigma(k+l+h)}) \Big)$$

である．したがって，

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta) \tag{3.2}$$

となる．同様に，

$$\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta) = (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta$$

も成り立つ． ∎

注意．$\xi, \eta \in V = \Lambda^1(V)$ に対して，反対称より

$$\begin{aligned} \xi \wedge \eta &= -\eta \wedge \xi, \\ \xi \wedge \xi &= \eta \wedge \eta = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる．一般的に，外積多項式の中で，1 外積ベクトルの繰返しがあれば，その外積は 0 である．

ベクトル空間 V の基底を $\{e_1, \dots, e_n\}$ としよう．このとき，結合法則の証明により

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \tag{3.4}$$

が成り立つ．したがって，上記の注意により，外積 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ が 0 でないための必要十分条件は，添字 $i_1, \dots, i_r$ がすべて異なるときに限る．特に $r > n$ のとき，添字 $i_1, \dots, i_r$ の繰返しが必ず起こるので，その外積は 0 となる．

r 外積ベクトル ξ を

$$\xi = \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \tag{3.5}$$

とかくと，任意の交代化写像は，線形なので，

$$\begin{aligned} \xi &= A_r \xi \\ &= \xi^{i_1 \cdots i_r} A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) \\ &= \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$r > n$ に対して，任意の r 外積ベクトルは 0 である，すなわち，

$$\Lambda^r(V) = 0, \qquad \forall r > n \tag{3.6}$$

となる．

ここで $r \leq n$ としよう．このとき，定理 2.1 により，ξ の成分 $\xi^{i_1\cdots i_r}$ は上付添字に関して反対称である．したがって，ξ は

$$\xi = r! \sum_{i_1<\cdots<i_r} \xi^{i_1\cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \tag{3.7}$$

とかける．

次に，$r \leq n$ のとき，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ は $\Lambda^r(V)$ の基底となることを示す．それをみるには，

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

個の外積ベクトルは 1 次独立であることを示せばよい．はじめに，$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ を評価しよう．

V^* の任意の元 $v^{*1}, \ldots, v^{*r}$ に対して

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}(v^{*1}, \ldots, v^{*r}) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r)} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \left\langle e_{i_1}, v^{*\sigma(1)} \right\rangle \cdots \left\langle e_{i_r}, v^{*\sigma(r)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} \langle e_{i_1}, v^{*1} \rangle & \cdots & \langle e_{i_1}, v^{*r} \rangle \\ \langle e_{i_2}, v^{*1} \rangle & \cdots & \langle e_{i_2}, v^{*r} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_{i_r}, v^{*1} \rangle & \cdots & \langle e_{i_r}, v^{*r} \rangle \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

が成り立つ．上記の式を，$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ の**計算公式**とよぶ．特に，

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}(e^{*j_1}, \ldots, e^{*j_r}) &= \frac{1}{r!} \det \left(\langle e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{r!} \delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r} \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる．ここで，

$$\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r} = \begin{cases} 1, & i_1, \ldots, i_r \text{ がすべて相異なり，} \{j_1, \ldots, j_r\} \\ & \text{が } \{i_1, \ldots, i_r\} \text{ の偶置換のとき；} \\ -1, & i_1, \ldots, i_r \text{ がすべて相異なり，} \{j_1, \ldots, j_r\} \\ & \text{が } \{i_1, \ldots, i_r\} \text{ の奇置換のとき；} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{3.10}$$

は**一般クロネッカーデルタ記号**とよばれるものである．

(3.9) より

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n(e^{*1}, \ldots, e^{*n}) = \frac{1}{n!} \tag{3.11}$$

が成り立つ．よって $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \neq 0$ である．$r < n$ に対して，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ が 1 次従属ならば，

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = 0 \tag{3.12}$$

が成立するような，すべては 0 ではないスカラー $a^{i_1 \cdots i_r} \in \mathbb{F}$ が存在する．例えば，$a^{j_1 \cdots j_r}$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n)$ は 0 ではないスカラーと仮定し，残りの添数を $k_1 < \cdots < k_{n-r}$ としよう．つまり，$\{j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_{n-r}\}$ は $\{1, \ldots, n\}$ の順列である．(3.12) の両辺に $e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-r}}$ の外積をとると，

$$a^{j_1 \cdots j_r} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-r}} = \pm a^{j_1 \cdots j_r} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0$$

が成り立つ．したがって，

$$a^{j_1 \cdots j_r} = 0$$

となるが，これは矛盾である．したがって，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ は 1 次独立であり，$\Lambda^r(V)$ の基底となる．よって，$\Lambda^r(V)$ の次元は

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

である．

定義 3.2 $\Lambda(V)$ で和 $\sum_{r=0}^{n} \Lambda^r(V)$ を表すと，$\Lambda(V)$ は 2^n 次元ベクトル空間である．ここで

$$\xi = \sum_{r=0}^{n} \xi^r, \qquad \eta = \sum_{s=0}^{n} \eta^s \tag{3.13}$$

に対して，ξ と η の**外積 (くさび積)** を

$$\xi \wedge \eta = \sum_{r,s=0}^{n} \xi^r \wedge \eta^s \tag{3.14}$$

で定義する．ここで $\xi^r \in \Lambda^r(V), \eta^s \in \Lambda^s(V)$ である．したがって，$\Lambda(V)$ は外積に対して代数となり，V の**外積代数** (または**グラスマン代数**) という．

集合 $\{1, e_i\,(1 \leq i \leq n),\ e_{i_1} \wedge e_{i_2}\,(1 \leq i_1 < i_2 \leq n), \ldots, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\}$ はベクトル空間 $\Lambda(V)$ の基底である．

同様に，双対空間 V^* の外積代数は

$$\Lambda(V^*) = \sum_{0\le r\le n} \Lambda^r(V^*)$$

である．$\Lambda^r(V^*)$ の元は r 次**外積形式**，または V における r **形式**とよぶ．これは，V 上の交代 $\mathbb{F}$ 値 r 線形関数である．

ベクトル空間 $\Lambda^r(V)$ と $\Lambda^r(V^*)$ は以下に示す内積に対して互いに双対である．すなわち，

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \Lambda^r(V),$$
$$v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*r} \in \Lambda^r(V^*)$$

に対して，内積を

$$\left\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*r} \right\rangle = \det\left(\left\langle v_\alpha, v^{*\beta}\right\rangle\right) \tag{3.15}$$

とする．よって，$\Lambda^r(V)$ と $\Lambda^r(V^*)$ の基底をそれぞれ $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}, 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n\}$ と $\{e^{*j_1} \wedge \cdots \wedge e^{*j_r}, 1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n\}$ とすると，

$$\begin{aligned}\left\langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}, e^{*j_1} \wedge \cdots \wedge e^{*j_r} \right\rangle &= \det\left(\left\langle e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta}\right\rangle\right) \\ &= \delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots j i_r} \\ &= \begin{cases} 1, & \{j_1,\ldots,j_r\} = \{i_1,\ldots,i_r\} \text{ のとき}, \\ 0, & \{j_1,\ldots,j_r\} \ne \{i_1,\ldots,i_r\} \text{ のとき} \end{cases}\end{aligned} \tag{3.16}$$

をみたす．したがって，これらの二つの基底は互いに双対である．

注意．§2-2 では，$T^r(V)$ と $T^r(V^*)$ の元の内積を (2.17) で定義した．$\Lambda^r(V)$ と $\Lambda^r(V^*)$ は，それぞれ $T^r(V)$ と $T^r(V^*)$ の部分空間なので，(2.17) は $\Lambda^r(V)$ と $\Lambda^r(V^*)$ の元の内積を導く．これは，$r!$ を除けば，(3.15) と同じである．したがって，テンソル空間の内積と外積ベクトル空間の内積をそれぞれ定義したが，それぞれの双対基底はスカラー倍を除けば簡単となる．二つの異なった内積を同じ記号 $\langle , \rangle$ で表したが，扱っている空間がどこかを念頭におけば，混乱のおそれはない．

ベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像を $f : V \longrightarrow W$ としよう．このとき，f は，外積ベクトル空間 $\Lambda^r(W^*)$ から外積ベクトル空間 $\Lambda^r(V^*)$ への線形写像を引き起こす．すなわち，任意の $\varphi \in \Lambda^r(W^*)$ $(v_1, \ldots, v_r \in V)$ に対して

$$f^*\varphi(v_1,\ldots,v_r) = \varphi(f(v_1),\ldots,f(v_r)) \tag{3.17}$$

とおくと，f^* は線形写像であり，外積と可換となる．

したがって，f^* は外積代数 $\Lambda(W^*)$ から外積代数 $\Lambda(V^*)$ への準同形写像である．

定理 3.2 写像 $f: V \longrightarrow W$ を線形写像としたとき，f^* は外積と可換であり，任意の $\varphi \in \Lambda^r(W^*)$, $\psi \in \Lambda^s(W^*)$ に対して

$$f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*\varphi \wedge f^*\psi \tag{3.18}$$

が成り立つ．

証明 任意の $v_1, \ldots, v_{r+s} \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
f^*(\varphi \wedge \psi)(v_1, \ldots, v_{r+s}) &= \varphi \wedge \psi(f(v_1), \ldots, f(v_{r+s})) \\
&= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r+s)} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \varphi\left(f(v_{\sigma(1)}), \ldots, f(v_{\sigma(r)})\right) \\
&\qquad \cdot \psi\left(f(v_{\sigma(r+1)}), \ldots, f(v_{\sigma(r+s)})\right) \\
&= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r+s)} \operatorname{sgn} \sigma \cdot f^*\varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right) \\
&\qquad \cdot f^*\psi\left(v_{\sigma(r+1)}, \ldots v_{\sigma(r+s)}\right) \\
&= f^*\varphi \wedge f^*\psi(v_1, \ldots, v_{r+s})
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，

$$f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*\varphi \wedge f^*\psi. \qquad \square$$

外積代数という概念は，線形部分空間の研究のため，H. Grassmann によって導入された．そのあと，E. Cartan は外微分形式の理論を発展させ，微分幾何学や微分方程式の研究にそれを用いて大きな成果をあげた．現在 外積代数は，可微分多様体の研究において，強力で重要な手段になっている．いくつかの有用な性質を以下に述べる．

定理 3.3 ベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ が 1 次従属であるための必要十分条件は

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0 \tag{3.19}$$

である．

証明 $v_1, \ldots, v_r$ を 1 次従属としたとき，v_r が $v_1, \ldots, v_{r-1}$ の 1 次結合

$$v_r = a_1 v_1 + \cdots + a_{r-1} v_{r-1}$$

で表されるとしても一般性は失わない．このとき，

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r-1} \wedge v_r = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r-1} \wedge (a_1 v_1 + \cdots + a_{r-1} v_{r-1}) = 0$$

が成り立つ．

逆に，$v_1, \ldots, v_r$ が 1 次独立であるとき，これらを用いてベクトル空間 V の基底 $\{v_1, \ldots v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ をとることができるので，そのとき

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_{r+1} \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0$$

となる．したがって，

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \neq 0. \qquad \square$$

定理 3.4 (カルタンの補題) ベクトル空間 V の二つのベクトルの集合 $\{v_1, \ldots v_r\}$, $\{w_1, \ldots, w_r\}$ を

$$\sum_{\alpha=1}^{r} v_\alpha \wedge w_\alpha = 0 \tag{3.20}$$

が成立するように選ぼう．このとき，$v_1, \ldots, v_r$ が 1 次独立ならば，w_α は v_β の 1 次結合として，

$$w_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} v_\beta, \qquad 1 \leq \alpha \leq r \tag{3.21}$$

とかける．ここで，

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{3.22}$$

証明 ベクトル $v_1, \ldots, v_r$ は 1 次独立であるので，これらで V の基底 $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ をとることができる．したがって，

$$w_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} v_\beta + \sum_{i=r+1}^{n} a_{\alpha i} v_i \tag{3.23}$$

と表すことができる．この式を (3.20) に代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} v_\alpha \wedge v_\beta + \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{i=r+1}^{n} a_{\alpha i} v_\alpha \wedge v_i \\ &= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq r} (a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}) v_\alpha \wedge v_\beta + \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{i=r+1}^{n} a_{\alpha i} v_\alpha \wedge v_i \end{aligned} \tag{3.24}$$

が得られる．$\{v_i \wedge v_j,\ 1 \leq i \leq j \leq n\}$ は $\Lambda^2(V)$ の基底であるので，(3.24) より

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} &= 0, \\ a_{\alpha i} &= 0 \end{cases}$$

が得られる．すなわち

$$w_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta} v_\beta, \quad かつ \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$$

となる． □

定理 3.5 ベクトル空間 V から r 個の 1 次独立なベクトル $v_1, \ldots, v_r$ をとり，$w \in \Lambda^p(V)$ とする．このとき，ベクトル w が $\psi_1, \ldots, \psi_r \in \Lambda^{p-1}(V)$ に対して

$$w = v_1 \wedge \psi_1 + \cdots + v_r \wedge \psi_r \tag{3.25}$$

と表せるための必要十分条件は

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w = 0 \tag{3.26}$$

である．

証明 $p + r > n$ の場合，(3.25) と (3.26) は自明なので，以下の議論では $p + r \leq n$ と仮定する．

必要性は明らかなので十分性のみを証明する．まず，$v_1, \ldots, v_r$ を用いて，ベクトル空間 V の基底 $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ をとろう．このとき，w は

$$w = v_1 \wedge \psi_1 + \cdots + v_r \wedge \psi_r + \sum_{r+1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n} \xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_p} \tag{3.27}$$

とかける．ここで $\psi_1, \ldots, \psi_r \in \Lambda^{p-1}(V)$ である．これを (3.26) に代入すると

$$\sum_{r+1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n} \xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_p} = 0 \tag{3.28}$$

が得られる．和における項 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_p}$ $(r+1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n)$ は $\Lambda^{p+r}(V)$ の基底となるので，

$$\xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} = 0, \qquad r + 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n$$

である，すなわち，

$$w = v_1 \wedge \psi_1 + \cdots + v_r \wedge \psi_r$$

となる． □

通常，(3.25) は $w \equiv 0 \mod (v_1, \ldots, v_r)$ とかく．

定理 3.6 ベクトル空間 V から二つのベクトルの集合 v_α, w_α; v'_α, w'_α $(1 \leq \alpha \leq k)$ をとる．このとき，$\{v_\alpha, w_\alpha, 1 \leq \alpha \leq k\}$ は 1 次独立で

$$\sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha \wedge w_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} v'_\alpha \wedge w'_\alpha \tag{3.29}$$

が成り立つとき，v'_α, w'_α は $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k$ の 1 次結合でかける．さらにそれらは 1 次独立である．

証明 (3.29) の外積を k 回とると，

$$k!(v_1 \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_k) = k!(v'_1 \wedge w'_1 \wedge \cdots \wedge v'_k \wedge w'_k) \tag{3.30}$$

が得られる．このとき，$\{v_\alpha, w_\alpha,\ 1 \leq \alpha \leq k\}$ は 1 次独立なので，(3.30) の左辺は 0 ではない．したがって，右辺 $\{v'_\alpha, w'_\alpha,\ 1 \leq \alpha \leq k\}$ は 1 次独立であることがわかる (定理 3.3 参照)．また (3.30) より

$$v_1 \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_k \wedge v'_\alpha = 0$$

となるので，$\{v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k, v'_\alpha\}$ は 1 次従属である．

したがって，v'_α は $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k$ の 1 次結合としてかける．上記の結果は w'_α に対しても成り立つ． □

注意．定理 3.6 の幾何学的な応用は文献の Chern 1944(a) を参照されたい．

行列式で表せる外積ベクトルの計算公式 (3.8) をみてわかるように，外積代数は行列式関数と密接な関係がある．$v_1, \ldots, v_k \in V$ とし，$w_1, \ldots, w_k$ が

$$w_\alpha = \sum_{\beta=1}^{k} t_\alpha^\beta v_\beta \tag{3.31}$$

と表されているとすると，

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_k = \det(t_\alpha^\beta) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \tag{3.32}$$

が成り立つ．要するに，外積ベクトル $w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$ と $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ との違いは，行列式の値のみである．

n 次元ベクトル空間 V の k 次元部分空間 L^k の全体を $G(k,n)$ と表す．このとき，$G(k,n)$ 上に自然な微分構造[1]が存在するので，$G(k,n)$ は $k(n-k)$ 次元の微分多様体となり，これは**グラスマン多様体**とよばれる．$k=1$ のときは，$G(k,n)$ はちょうど $(n-1)$ 次元**射影空間** P^{n-1} となる．さらに，$G(k,n)$ におけるいわゆる**プリュッカー–グラスマン座標**は外積ベクトルにより導かれる (以下を参照)．

$L^k \in G(k,n)$ とし，部分空間 L^k を張る 1 次独立な k 個のベクトルを $v_1, \ldots, v_k$ とする．(3.32) により，$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ は 0 ではないスカラー倍を除いて一意

1) グラスマン多様体の概念は非常に重要である．Boothby 1975 と Kobayashi and Nomizu 1963, 1969 を参照．

的に決まる．射影空間の同次座標系の一般化である $G(k,n)$ の部分空間 L^k のプリュッカー–グラスマン座標は，外積ベクトル ξ より定義される．

例として $G(2,4)$ を考えよう．V の基底を $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ とし，任意の $L^2 \in G(2,4)$ に対して，1 次独立なベクトル $v, w \in L^2$ をとり，

$$v = \sum_{i=1}^{4} v^i a_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{4} w^i a_i \tag{3.33}$$

と表す．このとき，

$$\xi = v \wedge w = \sum_{i<k} p^{ik} a_i \wedge a_k \tag{3.34}$$

が成り立つ．ここで $p^{ik} = v^i w^k - v^k w^i$ である．係数 $\{p^{ik},\ i<k\}$ は 0 でないスカラーを除けば決まる．これらは，ちょうど $G(2,4)$ におけるプリュッカー–グラスマン座標である．

$$v \wedge w \wedge v \wedge w = 0$$

なので

$$(p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23}) a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 = 0$$

となる．すなわち p^{ik} は**プリュッカー方程式**

$$p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0 \tag{3.35}$$

をみたす．よって，6 個の数 p^{ik} $(1 \leq i < k \leq 4)$ の間で 4 個の組のみ 1 次独立となるので，$G(2,4)$ の次元は 4 となる．逆に，プリュッカー方程式 (3.35) は外積ベクトル

$$\sum_{i<k} p^{ik} a_i \wedge a_k$$

が可約となるための十分条件[2)]である．したがって，(3.35) をみたすすべてが 0 ではない数 p^{ik} の集合は $G(2,4)$ を張る．

2) $p^{12} \neq 0$ と仮定すれば

$$p^{34} = \frac{p^{13}p^{24}}{p^{12}} - \frac{p^{14}p^{23}}{p^{12}}$$

とかける．直接計算すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} p^{ij} a_i \wedge a_j &= a_1 \wedge (p^{12}a_2 + p^{13}a_3 + p^{14}a_4) \\
&\quad - \frac{p^{23}}{p^{12}} a_3 \wedge (p^{12}a_2 + p^{13}a_3 + p^{14}a_4) - \frac{p^{24}}{p^{12}} a_4 \wedge (p^{12}a_2 + p^{13}a_3 + p^{14}a_4) \\
&= \left(a_1 - \frac{p^{23}}{p^{12}} a_3 - \frac{p^{24}}{p^{12}} a_4 \right) \wedge (p^{12}a_2 + p^{13}a_3 + p^{14}a_4)
\end{aligned} \qquad (\rightarrow)$$

ここで,

$$p^{12} = x^1 + y^1, \quad p^{13} = x^2 + y^2, \quad p^{14} = x^3 + y^3,$$
$$p^{34} = x^1 - y^1, \quad p^{42} = x^2 - y^2, \quad p^{23} = x^3 - y^3 \tag{3.36}$$

とおけば, (3.35) は

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 \tag{3.37}$$

となる. (3.37) の両辺が 1 となるように適当なスカラーを p^{ik} に掛ければ, (x^1, x^2, x^3) と (y^1, y^2, y^3) は単位球 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の点となる. 上記の議論より, (3.36) は全射

$$\pi : S^2 \times S^2 \longrightarrow G(2,4) \tag{3.38}$$

となる. ここで,

$$\pi(x, y) = \pi(-x, -y), \qquad (x, y) \in S^2 \times S^2 \tag{3.39}$$

であり, $-x$ は S^2 上の点 x の対心点である. したがって, $S^2 \times S^2$ は $G(2,4)$ [3)] の二重被覆空間である. 多様体 $S^2 \times S^2$ は単連結であるので, それは $G(2,4)$ の普遍被覆空間となる. したがって, $G(2,4)$ の**基本群** $\pi_1(G(2,4))$ は $\mathbb{Z}^2$ である.

4 次元ベクトル空間 V の有向 2 次元部分空間の全体の多様体を $\widetilde{G}(2,4)$ で表したとき, $\widetilde{G}(2,4)$ は $G(2,4)$ の二重被覆空間であり, よって $S^2 \times S^2$ に位相同形である.

(→) である. したがって (3.35) が成り立つときに, 外積ベクトル $\sum_{i<j} p^{ij} a_i \wedge a_j$ は可約である. プリュッカー方程式の議論は Cartan 1945 を参照されたい.

3) 被覆空間と基本群の概念については Munkres 1975 を参照.

3

外 微 分 法

§3-1　テンソル束とベクトル束

二つの多様体の積 (§1-1 参照) は非常に基本的な概念である．例えば，多様体 M 上の実数値関数 $f(x)$ のグラフ $(x, f(x))$ は M から $M \times \mathbb{R}$ への写像である．ファイバー束の言葉では，それはファイバー束 $M \times \mathbb{R}$ の切断である．ファイバー束は積多様体の一般化である．微分幾何学では，主にベクトル束とよばれるファイバー束の特殊なクラスをよく研究に用いる．すなわち，多様体の任意のベクトル場が，あるベクトル束の切断となるものである．本節では，最初にテンソル束の具体的な例を説明し，次により一般的なベクトル束について述べる．

M を滑らかな m 次元多様体とし，M の点 p における接空間と余接空間をそれぞれ T_p と T_p^* とする．このとき，M の点 p における (r,s) 型テンソル空間

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_{r\text{ 個}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*}_{s\text{ 個}} \tag{1.1}$$

が存在する．それは，m^{r+s} 次元ベクトル空間である．ここで

$$T_s^r = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p) \tag{1.2}$$

とおく．T_s^r が可算基をもつハウスドルフ空間となるような位相を T_s^r に導入し，さらに T_s^r が可微分多様体となる C^∞ 可微分構造を定義しよう．このようにして得られた可微分多様体は局所的に積多様体に局所微分同形となる．この T_s^r を M 上の (r,s) 型テンソル束という．

最初にいくつかの記号について説明しよう．V を $\mathbb{R}$ 上の m 次元ベクトル空間とする．V の線形自己同形群を $GL(V)$ で表し，V の 1 組の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$

を選ぼう．このとき，V は $\mathbb{R}^m$ と同形である．V の元 y を行ベクトルで

$$y = (y^1, \ldots, y^m) \tag{1.3}$$

とかくと，$GL(V)$ は $m \times m$ 正則行列の乗法群である．すなわち $GL(V)$ は一般線形群 $GL(m;\mathbb{R})$ とみなすことができる．さて，群 $GL(V)$ による V への右からの乗法作用を，行列表現で

$$y \cdot a = (y^1, \ldots, y^m) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^m \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

とかく．ここで $\det a = \det(a_i^j) \neq 0$ である．

ベクトル空間 V の (r,s) 型テンソル空間を V_s^r (第 2 章の定義 2.1 を参照) で表すと，その基底は

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s}, \quad 1 \leq i_\alpha,\, j_\beta \leq m \tag{1.5}$$

である．したがって，V_s^r の元は上記のように成分で表せる．V_s^r の元を (1.3) のように行ベクトルで表すと，(1.5) における基底の要素はある方法で順序づけられなければならない．例えば，添字 $(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s)$ はアルファベット順としてもよいだろう．

多様体 M の座標近傍 U をとり，その局所座標を $u^1 \ldots, u^m$ としよう．このとき，任意の点 $p \in U$ に対して，自然基底

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_p \right\} \quad と \quad \left\{(du^1)_p, \ldots, (du^m)_p\right\}$$

がとれる．それらは，それぞれ T_p と T_p^* の双対基底であるので，

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)_p \otimes (du^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (du^{j_s})_p, \quad 1 \leq i_\alpha,\, j_\beta \leq m \tag{1.6}$$

は $T_s^r(p)$ の基底である．さて，ここで任意の点 $p \in U$, $y \in V_s^r$ に対して，写像

$$\varphi_U : U \times V_s^r \longrightarrow \bigcup_{p \in U} T_s^r(p) \tag{1.7}$$

を，$\varphi_U(p,y)$ は $T_s^r(p)$ の元であり，(1.6) に関する $\varphi_U(p,y)$ の成分は (1.5) に関する y の成分と同じであるように定義することができる．明らかに，写像 φ_U

は 1 対 1 写像である．

多様体 M の座標被覆 $\{U, W, \ldots\}$ をとり，(1.7) に対応する写像を $\{\varphi_U, \varphi_W, \ldots\}$ としよう．$U \times V_s^r$ 等の開部分集合の φ_U 等による像集合を選んで，それが T_s^r の位相基[1)]となるようにする．テンソル空間 T_s^r は，この位相で可算基をもつハウスドルフ空間になり，(1.7) で定義される写像は同相である．

任意の点 $p \in U$ を固定すれば，

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y), \qquad y \in V_s^r \tag{1.8}$$

をみたすような写像 $\varphi_{U,p} : V_s^r \longrightarrow T_s^r(p)$ が定義できる．写像 φ_U の定義により，$\varphi_{U,p}$ はベクトル空間 V_s^r から $T_s^r(p)$ への線形同形写像である．

ここで，点 p を含む M の他の座標近傍 W をとり，その局所座標系を $w^1, \ldots, w^m$ とし，

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : V_s^r \longrightarrow V_s^r \tag{1.9}$$

とおくと，$g_{UW}(p)$ はベクトル空間 V_s^r の自己同形である．すなわち，$g_{UW}(p) \in GL(V_s^r)$ となる．(1.4) で定義したように，$GL(V_s^r)$ の元の V_s^r 上への作用は右からの乗法なので，任意の $y, y' \in V_s^r$ に対して

$$\varphi_U(p, y) = \varphi_W(p, y') \tag{1.10}$$

が成り立つための必要十分条件は

$$y' = y \cdot g_{UW}(p) \tag{1.11}$$

である．

M の二つの座標近傍 U, W をとる．$U \cap W \neq \varnothing$ の場合，(1.9) による写像

$$g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(V_s^r) \tag{1.12}$$

は滑らかであることを示そう．一般性を失わずに，$r = s = 1$ の場合のみを議論する．

接空間 T_p と余接空間 T_p^* の局所座標 $w^1, \ldots, w^m$ に関する自然基底をそれぞれ $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial w^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial w^m}\right)_p\right\}$ と $\left\{(dw^1)_p, \ldots, (dw^m)_p\right\}$ で表すと，

---

1)　このような集合は，位相基の定義をみたすことを示そう．実際，$U \cap W \neq \varnothing$ ならば，

$$\left(\bigcup_{p \in U} T_s^r(p)\right) \cap \left(\bigcup_{q \in W} T_s^r(q)\right) = \bigcup_{p \in U \cap W} T_s^r(p)$$

であり，これは，φ_W の基底での $U \cap W$ の像であり，また φ_U の基底での像でもある．その証明は読者にまかせる．

$$y = y^i_j e_i \otimes e^{*j}, \quad y' = {y'}^i_j e_i \otimes e^{*j} \tag{1.13}$$

は $y, y' \in V^1_1$ の成分表現である．このとき，

$$\begin{cases} \varphi_U(p, y) = y^i_j \left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \otimes (du^j)_p, \\ \varphi_W(p, y') = {y'}^i_j \left(\dfrac{\partial}{\partial w^i}\right)_p \otimes (dw^j)_p \end{cases} \tag{1.14}$$

が成り立つ．さらに，$U \cap W$ において上記の自然基底は

$$\begin{cases} du^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial w^j} dw^j, \\ \dfrac{\partial}{\partial u^i} = \dfrac{\partial w^j}{\partial u^i} \dfrac{\partial}{\partial w^j} \end{cases} \tag{1.15}$$

をみたす．ここで，$J_{UW} = \left(\dfrac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)$ は局所座標変換におけるヤコビ行列である．(1.15) を (1.14) と (1.10) に代入すると，

$${y'}^i_j = y^k_l \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p$$

となる．すなわち，

$$(y \cdot g_{UW}(p))^i_j = y^k_l \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p \tag{1.16}$$

が成り立つ．ここで，点 y を行ベクトル $(y^1_1, y^1_2, \ldots, y^m_1, y^m_2, \ldots, y^m_m)$ とかくと，上記の式は，$g_{UW}(p)$ を表現する $(m^2 \times m^2)$ 非退化行列がちょうどヤコビ行列 J_{UW} とその逆行列とのテンソル積[2)]であること，すなわち，

$$g_{UW} = J_{UW} \otimes J^{-1}_{UW} \tag{1.17}$$

を示している．ヤコビ行列 J_{UW} と $J^{-1}_{UW} = J_{WU}$ の両方のすべての元は $U \cap W$ において滑らかな関数なので，g_{UW} も $U \cap W$ の上で滑らかである．

T^r_s の位相構造より，集合 $\{\varphi_U(U \times V^r_s), \varphi_W(W \times V^r_s), \ldots\}$ は T^r_s の開被覆

2) 行列 $A = \left(a^i_j\right)$ と $B = \left(b^\alpha_\beta\right)$ のテンソル積は，行列 $A \otimes B = \begin{pmatrix} a^1_1 B & \cdots & a^m_1 B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_m B & \cdots & a^m_m B \end{pmatrix}$ であり，その元は $a^i_j \cdot b^\alpha_\beta$ である．

である．座標近傍 $\varphi_U(U \times V_s^r)$ における点 $\varphi_U(p, y)$ の座標は

$$(u^i(p), y^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}) \tag{1.18}$$

であり，ここで u^i は多様体 M の近傍 U の局所座標であり，$y^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ は (1.5) における基底に関する $y \in V_s^r$ の成分である．$U \cap W \neq \varnothing$ 場合，写像 g_{UW} : $U \cap W \longrightarrow GL(V_s^r)$ は滑らかであり，(1.11) より，上記の T_s^r の被覆座標は C^∞ 両立であることがわかるので，T_s^r は滑らかな多様体となる．明らかに，自然射影

$$\pi : T_s^r \longrightarrow M \tag{1.19}$$

は $T_s^r(p)$ の元を点 $p \in M$ に写像し，滑らかな全射である．滑らかな多様体 T_s^r を M 上の (r, s) **型テンソル束**といい，π を**束射影**，$T_s^r(p)$ を束 T_s^r の点 p におけるファイバーという．

上記の T_s^r で $r = 1$, $s = 0$ とおくと，M の**接束**となり，それを $T(M)$ と表す．$r = 0$, $s = 1$ とおくと，M の**余接束**が得られる．それを $T^*(M)$ と表す．上記の方法を用いれば，同様に，M 上の**外微分ベクトル束**と**外微分形式束**が得られ，それぞれ

$$\begin{cases} \Lambda^r(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p), \\ \Lambda^r(M^*) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p^*) \end{cases} \tag{1.20}$$

で表す．

ここで $f : M \longrightarrow T_s^r$ を滑らかな写像としよう．このとき，任意の点 $p \in M$, $f(p) \in T_s^r(p)$ に対して，

$$\pi \circ f = \mathrm{id} : M \longrightarrow M$$

ならば，f をテンソル束 T_s^r の**滑らかな切断**，または M 上の (r, s) 型の**滑らかなテンソル場**という．接束の切断は M 上の接ベクトル場であり，余接束の切断は微分 1 次形式である．外微分形式束 $\Lambda^r(M^*)$ の切断は M 上の r 次**外微分形式**という．

テンソル束の構造を一般化すれば，一般ベクトル束の概念が得られる．次章で扱うベクトル束と接続は，物理学におけるゲージ場理論の数学的基礎となる．

定義 1.1　E, M を滑らかな多様体とし，$\pi : E \longrightarrow M$ を滑らかな全射写像とする．さらに，$V = \mathbb{R}^q$ を q 次元ベクトル空間とする．次の条件をみたす

多様体 M の開被覆 $\{U, W, Z, \ldots\}$ と写像の族 $\{\varphi_U, \varphi_W, \varphi_Z, \ldots\}$ があるとき，(E, M, π) を (実)q 次元**ベクトル束**という．ここで，E は**束空間**，M は**底空間**，π は**束射影**，$V = \mathbb{R}^q$ は**典型的なファイバー**という．

1) 任意の φ_U は $U \times \mathbb{R}^q$ から $\pi^{-1}(U)$ への微分同相であり，任意の $p \in U$, $y \in \mathbb{R}^q$ に対して

$$\pi \circ \varphi_U(p, y) = p \tag{1.21}$$

をみたす．

2) 任意の $p \in U$ に対して，

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y), \qquad y \in \mathbb{R}^q \tag{1.22}$$

とおくとき，写像 $\varphi_{U,p} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \pi^{-1}(p)$ は同相であり，$U \cap W \neq \varnothing$ のとき，任意の $p \in U \cap W$ に対して，

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q \tag{1.23}$$

は $V = \mathbb{R}^q$ の線形自己同形となる．すなわち，$g_{UW}(p) \in GL(V)$ である．

3) $U \cap W \neq \varnothing$ のとき，写像 $g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(V)$ は滑らかである．

上記の条件 2) より，任意 y_U, $y_W \in V$ が，

$$\varphi_U(p, y_U) = \varphi_W(p, y_W) \tag{1.24}$$

をみたすための必要十分条件は，

$$y_U \cdot g_{UW}(p) = y_W \tag{1.25}$$

である．ここで，$g_{UW}(p)$ は $(q \times q)$ 型非退化行列である．

任意の $p \in M$ に対して，$E_p = \pi^{-1}(p)$ を点 p におけるベクトル束の**ファイバー**という．点 p における開集合 U が多様体 M 上の座標近傍のとき，ファイバー V の線形構造は写像 $\varphi_{U,p}$ によってファイバー E_p にうつされ，E_q は q 次元ベクトル空間となる．条件 2) により，E_q の線形構造は U と φ_U のとり方によらない (このことの証明は読者にまかせる)．したがって，ベクトル束 E はファイバーどうしの線形構造を保ちながら，点 $p \in M$ 上の対応するファイバーに沿って積多様体 $U \times \mathbb{R}^q$ を貼り付けたものと直観的にみることができる．ここで U は M 上の局所座標近傍である．

積多様体 $M \times \mathbb{R}^q = E$ は M 上の**自明な束**とよばれるベクトル束のもっとも簡単な例であり，**積束**とよばれる．明らかに，前章で述べたすべてのテンソル

束 T^r_s はベクトル束である．

注意．q 次元複素ベクトル空間 V を用いると，定義 1.1 により，M 上の q 次元複素ベクトル束が導入できる．この場合は，$GL(V)$ は $GL(q;\mathbb{C})$ に同形であり，ファイバー $\pi^{-1}(p)\,(p \in M)$ は q 次元複素ベクトル空間である．本章では実ベクトル束で記述しているが，それは，適当な変更の上で複素ベクトル束でも適用できる．

条件 2) における $g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(V)$ は，次の条件

1) 任意の $p \in U$ に対して，$g_{UU}(p) = \mathrm{id} : V \longrightarrow V$,
2) 任意の $p \in U \cap W \cap Z \neq \varnothing$ に対して，

$$g_{UW}(p) \cdot g_{WZ}(p) \cdot g_{ZU}(p) = \mathrm{id} : V \longrightarrow V,$$

をみたす集合 $\{g_{UW}\}$ を，ベクトル束 (E, M, π) の**推移関数族**という．なお，上記条件 1), 2) は $\{g_{UW}\}$ が推移関数族となるための必要十分条件である．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 1.1　M を m 次元可微分多様体とし，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ を M の開被覆，V を q 次元ベクトル空間とすると，任意の $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$，ただし $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ に対して，条件 1), 2) をみたす滑らかな写像 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(V)$ が存在すれば，推移関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ をもつ q 次元ベクトル束 (E, M, π) が存在する．

定理 1.1 の詳細な証明は，Steenrod 1951, p.14 を参照されたい．この証明のアイデアは，積多様体 $U_\alpha \times V$ を，対応するファイバーに沿って貼り付けることにある．簡単にいえば，

$$\widetilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\alpha\} \times U_\alpha \times V \tag{1.26}$$

とおくと，$\widetilde{E}$ は自然に可微分多様体となる．ここで，$\widetilde{E}$ に次の同値関係 $\sim$ を定義しよう．任意の $(\alpha, p, y), (\beta, p', y') \in \widetilde{E}$ に対して，同値関係 $\sim$ は，

$$p = p' \in U_\alpha \cap U_\beta \quad \text{と} \quad y' = y \cdot g_{\alpha\beta}(p) \tag{1.27}$$

で定義する．同値関係 $\sim$ による $\widetilde{E}$ の商空間を $e = \widetilde{E}/\sim$ かくと，これは滑らかな多様体となる．(α, p, y) の同値類を $[\alpha, p, y]$ で表し，滑らかな写像である射影 $\pi : E \to M$ を

$$\pi([\alpha, p, y]) = p \tag{1.28}$$

で定義しよう．このとき，(E, M, π) は M 上の q 次元ベクトル束であり，推移

関数は $\{g_{\alpha\beta}\}$ である．

この定理により，推移関数はベクトル束を特徴づけるものである．すなわち，ベクトル束を構成するには，その推移関数を記述すれば十分である．

例 1 (ベクトル束 E の双対束 E^*). ベクトル空間 V の双対ベクトル空間を V^* とし，V^* をファイバーとする M 上のベクトル束を E^*，射影を $\widetilde{\pi}$ としよう．さらに，束 E^* の局所座標系の集合を $\{(U,\psi_U),(W,\psi_W),(Z,\psi_Z),\dots\}$ としよう．

$$\begin{aligned}\varphi_U(p,y_U)&=\varphi_W(p,y_W),\\ \psi_U(p,\lambda_U)&=\psi_W(p,\lambda_W)\end{aligned} \tag{1.29}$$

をみたす任意の $p\in U\cap W\neq\varnothing$，$y_U, y_W\in V$, $\lambda_U,\lambda_W\in V^*$ に対して，

$$< y_U\,,\,\lambda_U >=< y_W\,,\,\lambda_W > \tag{1.30}$$

が成り立つことにしよう．このとき，互いに双対ベクトル空間となるファイバー $\pi^{-1}(p)$ と $\widetilde{\pi}^{-1}(p)$ との間に 1 対 1 対応があり，その対応は，

$$\langle\varphi_U(p,y_U)\,,\,\psi_U(p,\lambda_U)\rangle =< y_U\,,\,\lambda_U > \tag{1.31}$$

で定義され，座標系 U のとり方によらない．ベクトル束 E^* を E の**双対束**という．

V と V^* の双対基底をとると，任意の $y\in V$ を行ベクトル，任意の $\lambda\in V^*$ を列ベクトルで表せば，V と V^* との間の対応を

$$< y\,,\,\lambda >= y\cdot\lambda \tag{1.32}$$

の行列の積で表すことができる．(1.29) の第 1 式より，

$$y_W = y_U\cdot g_{UW}(p)$$

となり，(1.30) に代入すれば，

$$y_U\cdot\lambda_U = y_U\cdot g_{UW}(p)\cdot\lambda_W$$

である．すなわち

$$\lambda_U = g_{UW}(p)\cdot\lambda_W \tag{1.33}$$

が成り立つ．V^* の要素を行ベクトルでかくと，$GL(V^*)$ の元は V^* に右から作用し，E^* の推移関数は

$$h_{UW} = {}^t(g_{UW}^{-1}) = {}^t g_{WU} \tag{1.34}$$

である．

E が M の接束のとき，その推移関数族 $\{J_{UW}\}$ は座標変換のヤコビ行列となっている．余接束の推移関数は，行列 J_{UW} の逆行列の転置行列である．したがって，余接束は接束の双対束である．

例 2 (E と E' **の直和** $E \oplus E'$)**.** E と E' をそれぞれ V と V' をファイバーにもつ M 上のベクトル束とし，推移関数を $\{g_{UW}\}$ と $\{g'_{UW}\}$ としよう．ここで，

$$h_{UW} = \begin{pmatrix} g_{UW} & 0 \\ 0 & g'_{UW} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

とおくと，h_{UW} は $V \oplus V'$ 上の右作用線形自己同型であり，推移関数族 $\{h_{UW}\}$ は条件 1), 2) をみたす．ファイバーが $V \oplus V'$ で推移関数が $\{h_{UW}\}$ であるベクトル束を E と E' の**直和**といい，$E \oplus E'$ とかく．

例 3 (**ベクトル束** E と E' **のテンソル積** $E \oplus E'$)**.** E と E' を上記の例 2 と同様にとる．g_{UW} と g'_{UW} のテンソル積を h_{UW}，すなわち $h_{UW} = g_{UW} \otimes g'_{UW}$ とおき，$V \otimes V'$ への作用は

$$(v \otimes v') \cdot h_{UW} = (v \cdot g_{UW}) \otimes \left(v' \cdot g'_{UW}\right) \tag{1.36}$$

とする．ここで，$v \in V$, $v' \in V'$ である．このとき，明らかに $\{h_{UW}\}$ は推移関数の条件をみたす．ファイバー $V \otimes V'$，推移関数族 $\{h_{UW}\}$ をもつ M 上のベクトル束を E と E' の**テンソル積** $E \otimes E'$ という．M 上の (r, s) 型のテンソル束は r 接束と s 余接束のテンソル積であることが容易にわかる．

定義 1.2　$s : M \longrightarrow E$ を滑らかな写像とし，

$$\pi \circ s = \mathrm{id} : M \longrightarrow M \tag{1.37}$$

が成り立つとき，写像 s はベクトル束 (E, M, π) の**滑らかな切断**という．ベクトル束 (E, M, π) の滑らかな切断の全体を $\Gamma(E)$ で表す．

ベクトル束の各ファイバーは V に同形なベクトル空間なので，各点で切断の加法とスカラー倍が定義できる．$s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$，$\alpha$ を M 上の滑らかな実数

値関数とする．このとき，任意の $p \in M$ に対して，

$$(s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p),$$
$$(\alpha s)(p) = \alpha(p) \cdot s(p)$$

と定義する．このとき，$s_1 + s_2$ と αs はベクトル束 E の滑らかな切断となるので，$\Gamma(E)$ は $C^\infty(M)$ 加群となる．これはもちろん実ベクトル空間である．

注意．いたるところ 0 ではないベクトル束 E の滑らかな切断はつねに存在するとは限らない．このような切断の存在は多様体 M の位相的な性質による．

§3-2 外微分

M を m 次元滑らかな多様体としよう．このとき，M 上の r 次外微分形式束

$$\Lambda^r(M^*) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p^*)$$

は M 上のベクトル束である．外微分形式束 $\Lambda^r(M^*)$ の滑らかな切断の全体を $A^r(M)$，すなわち，

$$A^r(M) = \Gamma(\Lambda^r(M^*)) \tag{2.1}$$

とおくと，$A^r(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群となる．$A^r(M)$ の元を M 上の r **次外微分形式**という．したがって，M 上の r 微分形式は，M 上の r 共変交代テンソル場である．

同様に，外微分形式束 $\Lambda(M^*) = \bigcup_{p \in M} \Lambda(T_p^*)$ も M 上のベクトル束であり，その切断の全体 $A(M)$ の元を M 上の外微分形式という．明らかに $A(M)$ は直和

$$A(M) = \sum_{r=0}^{m} A^r(M) \tag{2.2}$$

として表すことができる．すなわち，任意の外微分形式 ω は

$$\omega = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^m \tag{2.3}$$

とかける．ここで，ω^i は i 外微分形式である．また，外微分形式の外積は外微分形式空間 $A(M)$ に拡張できる．すなわち，任意の $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$ と $p \in M$ に対して

$$\omega_1 \wedge \omega_2(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p) \tag{2.4}$$

とおこう．ここで右辺は外微分形式の積である．明らかに $\omega_1 \wedge \omega_2 \in A(M)$ となり，空間 $A(M)$ に加法，スカラー倍が定義され，外積に対して代数となる．さらに，$A(M)$ は**次数つき代数**である．要するに，$A(M)$ はいくつかのベクトル空間列の直和であり，外積 $\wedge$ は写像

$$\wedge : A^r(M) \times A^s(M) \longrightarrow A^{r+s}(M) \tag{2.5}$$

となる．ここで，$r+s>m$ の場合，$A^{r+s}(M)$ は 0 である．

注意．テンソル積 $\otimes$ に対して，テンソル代数 $T(V)$ と $T(V^*)$ はそれぞれ次数つき代数であり，外積 $\wedge$ に対して，外積代数は次数つき代数である．

局所座標系を用いて，r 外微分形式 ω の座標近傍 U への制限は

$$\omega = a_{i_1,\ldots,i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \tag{2.6}$$

とかける．ここで，$a_{i_1,\ldots,i_r}$ は U 上の滑らかな下付添字に対して交代である関数である．

r 次外微分形式 $\Lambda^r(M)$ ベクトル束と r 次外微分形式束 $\Lambda^r(M^*)$ は互いに双対である．§3-1 の例 1 に記述したように，$p \in M$ における $\Lambda^r(M)$ のファイバーから $\Lambda^r(M^*)$ のファイバーへの写像は，$\Lambda^r(V)$ から $\Lambda^r(V^*)$ への写像により誘導される．したがって，第 2 章の (3.16) より，

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_r}}, du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_r} \right\rangle = \delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r} \tag{2.7}$$

となり，局所座標系 u^i における成分 $a_{i_1\cdots i_r}$ は

$$a_{i_1\cdots i_r} = \frac{1}{r!} \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial u^i_r}, \omega \right\rangle \tag{2.8}$$

とかける．また，$A(M)$ 上に外微分作用素 d が存在するので，空間 $A(M)$ は微分多様体理論において重要な役割を果たしている．この作用素 d を 2 回作用させると，0 になるという特徴をもっている．

定理 2.1　滑らかな m 次元多様体 M に対して，以下をみたすただ一つの写像 $d : A(M) \longrightarrow A(M)$ が存在する．$d(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M)$ であり，かつ

1) 任意の $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$ に対して，$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

2) r 外微分形式 ω_1 に対して，

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

3) M 上の滑らかな関数 f, すなわち $f \in A^0(M)$ に対して df は f の微分である.
4) $f \in A^0(M)$ に対して, $d\,(df) = 0$.

上記で定義された写像 d を**外微分**という.

証明 まず, 外微分作用素 d が存在すれば, d は局所作用素であることを示そう. 要するに, $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$ に対して, M の開集合 U 上で ω_1 と ω_2 が等しければ, $d\omega_1$ と $d\omega_2$ の U への制限も等しい. このために, $\omega|_U = 0$ ならば, $(d\omega)|_U = 0$ を示せばよい. 任意の点 $p \in U$ に対して, 多様体の局所コンパクト性より, $p \in W \subset \overline{W} \subset U$ となる点 p の開近傍 W が存在し, §1-3 の補題 3 より,

$$h(p') = \begin{cases} 1, & p' \in W, \\ 0, & p' \notin U \end{cases}$$

をみたす M 上の滑らかな関数 h が存在することがわかる. したがって, $h\omega \in A(M)$, $h\omega \equiv 0$ であり,

$$dh \wedge \omega + hd\omega = 0, \qquad d\omega|_W = 0$$

となる. $p \in U$ は任意の点なので, $d\omega$ の U への制限は 0 となる.

ω を開集合 U で定義される外微分形式としよう. このとき, §1-3 の補題 3 より, $U_1 \subset U$ をみたす点 p の座標近傍 U_1 と

$$\widetilde{\omega}|_{U_1} = \omega|_{U_1} \tag{2.9}$$

をみたすような M 上の外微分形式 $\widetilde{\omega}$ が存在する. したがって,

$$d\omega|_{U_1} = d\widetilde{\omega}|_{U_1} \tag{2.10}$$

と定義すると, d は局所微分作用素なので, 上記の定義は $\widetilde{\omega}$ のとり方によらない. したがって, $d\omega$ が定義可能である.

次に, 局所座標近傍内の外微分 d の一意性を示そう. 条件 1) より, 単項式の場合のみ一意性を示せばよい. 座標近傍 U で ω を

$$\omega = a du^1 \wedge \cdots \wedge du^r \tag{2.11}$$

とすると, U 上の外微分形式への d の作用は条件 1)–4) をみたす. ここで, a は U 上の滑らかな関数である. したがって[3),]

$$d\omega = da \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r \tag{2.12}$$

3) この等式が成り立つことは, 座標関数 u^i が U 上の滑らかな関数なので, 条件 4) より $d(du^i) = 0$ となることよりわかる.

となり，座標近傍 U への $d\omega$ の制限は完全に決定される．ここで da は a の微分である．

$$\omega|_U = a_{i_1\cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \tag{2.13}$$

とおき，

$$d(\omega|_U) = da_{i_1\cdots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \tag{2.14}$$

と定義すると，$d(\omega|_U)$ は条件 1), 3) をみたす U 上の $(r+1)$ 外微分形式である．

条件 2) が成り立つことを示すのに，単項式

$$\alpha_1 = a du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r},$$
$$\alpha_2 = b du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}$$

をとろう．すると，定義 (2.14) より，

$$\begin{aligned} d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &= (bda + adb) \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s} \\ &= \left(da \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}\right) \wedge \left(bdu^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}\right) \\ &\quad + (-1)^r \left(adu^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}\right) \wedge \left(db \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}\right) \\ &= d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^r \alpha_1 \wedge d\alpha_2 \end{aligned}$$

となる．したがって条件 2) は成り立つ．

次に条件 4) を示す．M 上の滑らかな関数 f をとろう．このとき，U 上で

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i \tag{2.15}$$

が成り立つ．f は C^∞ 関数なので，偏微分はその順序によらない．すなわち，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \tag{2.16}$$

となるので，

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right) \wedge du^i \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} du^j \wedge du^i \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}\right) du^j \wedge du^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで別の座標近傍 W の場合，外微分作用素 d の局所的な性質と一意性より，

$$\begin{aligned} d(\omega|_U)|_{U\cap W} &= d(\omega|_{U\cap W}) \\ &= d(\omega|_W)|_{U\cap W} \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる．したがって，外微分作用素 d は (2.14) により，$U \cap W$ 上で同一に定義される．すなわち，d は M 上に大域的に定義される．したがって，定理の条件をみたす作用素が存在する． □

定理 2.2 (ポアンカレの補題) $d^2 = 0$，すなわち任意の外微分形式 ω に対して $d(d\omega) = 0$ である．

証明 d は線形作用素なので，単項式の場合のみ証明すればよい．d の局所的な性質に基づき，

$$\omega = a du^1 \wedge \cdots \wedge du^r$$

とおくと，

$$d\omega = da \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r$$

となる．条件 2), 4) を念頭におきながら，もう一度微分すれば，

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(da) \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r - da \wedge d(du^1) \wedge \cdots \wedge du^r + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる． □

例 1. $\mathbb{R}^3$ のデカルト座標を (x, y, z) としよう．

1) f が $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数ならば，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

となる．ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ を f の勾配といい，$\mathrm{grad}\, f$ で表す．

2) $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数 A, B, C に対して，$a = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ とおくと

$$\begin{aligned} da &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

となる．ベクトル $X=(A, B, C)$ に対して，da の係数から構成されるベクトル

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z},\ \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x},\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

はベクトル場 X の回転であり，$\mathrm{curl}\, X$ と表す．

3) $a = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$ に対して,

$$da = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$
$$= \text{div } X dx \wedge dy \wedge dz$$

となる．ここで，div X はベクトル場 $X = (A, B, C)$ の発散である．

ここで，ポアンカレの補題より，ベクトル解析で重要な次の二つの基本公式が得られる．$\mathbb{R}^3$ の滑らかな関数 f と $\mathbb{R}^3$ の滑らかな接ベクトル場 X に対して

$$\begin{cases} \text{curl}\ (\ \text{grad}\ f) = 0, \\ \text{div}\ (\ \text{curl}\ X) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

が成り立つ．

定理 2.3 滑らかな多様体 M 上の外微分 1 次形式 ω，M の滑らかな接ベクトル場 X, Y に対して，

$$\langle X \wedge Y\, ,\, d\omega \rangle = X \langle Y\, ,\, \omega \rangle - Y \langle X\, ,\, \omega \rangle - \langle [X\, ,\, Y]\, ,\, \omega \rangle \tag{2.19}$$

が成り立つ．

証明　(2.19) の両辺は ω に関して線形なので，ω が単項式

$$\omega = g\,df \tag{2.20}$$

である場合をとればよい．ここで，f, g は M 上の滑らかな関数である．このとき，

$$d\omega = dg \wedge df \tag{2.21}$$

となる．第 2 章の (3.15) によると，(2.19) の左辺は

$$\langle X \wedge Y\, ,\, dg \wedge df \rangle = \begin{vmatrix} \langle X\, ,\, dg \rangle & \langle X\, ,\, df \rangle \\ \langle Y\, ,\, dg \rangle & \langle Y\, ,\, df \rangle \end{vmatrix}$$
$$= Xg \cdot Yf - Xf \cdot Yg \tag{2.22}$$

である．

$$\langle X\, ,\, \omega \rangle = \langle X\, ,\, gdf \rangle = g \cdot Xf$$

より，

$$Y \langle X\, ,\, \omega \rangle = Yg \cdot Xf + g \cdot Y\,(Xf) \tag{2.23}$$

が得られる．同様に

$$X \langle Y\, ,\, \omega \rangle = Xg \cdot Yf + g \cdot X(Yf) \tag{2.24}$$

が成り立つ.

したがって, (2.19) の左辺は

$$
\begin{aligned}
X \langle Y , \omega \rangle - Y \langle X , \omega \rangle - \langle [X , Y] , \omega \rangle \\
&= Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf + g(X(Yf) - Y(Xf)) - g \langle [X , Y] , df \rangle \\
&= Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

となり, (2.19) が成り立つ. □

注意. 任意の次数の外微分形式 $\omega \in A^r(M)$ と M の滑らかな接ベクトル場 $X_1, \ldots, X_{r+1}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle X_1 \wedge \cdots \wedge X_{r+1} , d\omega \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \left\langle X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_{r+1} , \omega \right\rangle \\
&\qquad + \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j} \left\langle [X_i , X_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_{r+1} , \omega \right\rangle
\end{aligned} \qquad (2.26)
$$

が成り立つ. その証明は読者にまかせる.

定理 2.3 を用いて, 第 1 章に述べた r 次元分布におけるフロベニウスの条件はその双対条件でかける. M 上の滑らかな分布 $L^r = \{X_1, \ldots, X_r\}$ は, 任意の点 $p \in M$ に対して, T_p の r 次元線形部分空間である. ここで

$$(L^r(p))^\perp = \{\omega \in T_p^* | \langle X , \omega \rangle = 0, \text{ 任意の } X \in L^r(p)\} \qquad (2.27)$$

とおくと, $(L^r(p))^\perp$ は確かに T_p^* の $(m-r)$ 次元部分空間であり, $L^r(p)$ の**零化部分空間**とよぶ. 任意の点の近傍には, 零化部分空間 $(L^r(p))^\perp$ を張る $(m-r)$ 個の 1 次独立な 1 次微分形式 $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_m$ が存在する. 実際, L^r は p の近傍で, r 個の 1 次独立である滑らかな接ベクトル場 $\{X_1, \ldots, X_r\}$ によって張られる. したがって, $\{X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_m\}$ は p の近傍でいたるところ 1 次独立となる滑らかな接ベクトル場 $X_{r+1}, \ldots, X_m$ が存在する. その近傍における双対 1 次微分形式を $\{\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_m\}$ とおくと, 各点 p で $(L^r(p))^\perp$ は $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_m$ によって張られる. したがって, 分布 L^r は局所的に連立方程式

$$\omega_s = 0, \qquad r+1 \leq s \leq m \qquad (2.28)$$

と同値である. これらは**パッフ連立方程式**とよばれる.

(2.19) より，

$$\langle X_\alpha \wedge X_\beta\,,\, d\omega_s\rangle = X_\alpha \langle X_\beta\,,\,\omega_s\rangle - X_\beta\langle X_\alpha\,,\,\omega_s\rangle - \langle [X_\alpha\,,\,X_\beta]\,,\,\omega_s\rangle$$
$$= -\langle [X_\alpha\,,\,X_\beta]\,,\,\omega_s\rangle$$

となるので，分布 $L^r = \{X_1, \ldots, X_r\}$ がフロベニウスの条件

$$[X_\alpha\,,\,X_\beta] \in L^r, \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq r \tag{2.29}$$

をみたすための必要十分条件は，

$$\langle X_\alpha \wedge X_\beta\,,\, d\omega_s\rangle = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq r, \quad r+1 \leq s \leq m \tag{2.30}$$

である．(2.30) は

$$d\omega_s \equiv 0 \bmod (\omega_{r+1}, \ldots, \omega_m), \qquad r+1 \leq s \leq m \tag{2.31}$$

と同値であることを示そう．$\omega_i\,(1 \leq i \leq m)$ を用いて，$d\omega_s$ は

$$d\omega_s = \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{st} \wedge \omega_t + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} a^s_{\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta \tag{2.32}$$

で表せる．ここで，ψ_{st} は 1 次微分形式，$a^s_{\alpha\beta}$ は下付添字に対して交代の滑らかな関数である．ここで，

$$\langle X_i\,,\,\omega_j\rangle = \delta_{ij}$$

が成り立つので，(2.32) を (2.30) に代入すると，

$$a^s_{\alpha\beta} = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq r, \ \ r+1 \leq s \leq m$$

が得られる．すなわち，

$$d\omega_s = \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{st} \wedge \omega_t \tag{2.33}$$

が成り立つ．これは (2.31) である．式 (2.31) をパッフ連立方程式 (2.28) がみたすフロベニウス条件という．

部分多様体

$$u^s = \text{定数}, \qquad r+1 \leq s \leq m \tag{2.34}$$

がパッフ連立方程式 (2.28) をみたすような局所座標系 u^i が存在すれば，そのパッフ連立方程式は**完全積分可能**であるといわれる．よって，完全積分可能なパッフ連立方程式 (2.28) の場合，その連立方程式が

$$du^s = 0, \qquad r+1 \leq s \leq m \tag{2.35}$$

をみたす局所座標系 u^i が存在することと同値である．このとき，分布 L^r は接ベクトル場 $\partial/\partial u^1, \ldots, \partial/\partial u^r$ で張られている．逆も成り立つ．したがって，第1章のフロベニウスの定理は次のように述べられる．

定理 2.4 パッフ連立方程式

$$\omega_\alpha = 0, \qquad 1 \le \alpha \le r \tag{2.36}$$

が完全積分可能であるための必要十分条件は，

$$d\omega_\alpha \equiv 0 \bmod (\omega_1, \ldots, \omega_r), \quad 1 \le \alpha \le r \tag{2.37}$$

である．

例 2.

$$\Omega \equiv P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{2.38}$$

を $\mathbb{R}^3$ における全微分としよう．ここで，P, Q, R は $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数である．このとき，(2.38) が完全積分可能であるというのは，十分小さい近傍で

$$F = \text{定数}$$

が (2.38) の第一積分となる滑らかな関数 F が存在することである．定理 2.4 によって，(2.38) が完全積分可能であるための必要十分条件は

$$d\Omega \wedge \Omega = 0$$

である．すなわち

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.39}$$

である．要するに，(2.39) は，(2.38) が積分因子をもつための必要十分条件である．

フロベニウスの定理は局所的な定理である．これは，ある近傍内でのパッフ連立方程式の解について記述している．しかし，このような局所定理から，大域的な積分多様体を扱うことができる．そのためには，M 上に新しい位相を導入する必要がある．フロベニウスの条件をみたす M 上の r 次元分布 L^r に対して，M の "開集合" を L^r の積分多様体の和集合と定義すると，この "開集合" の全体は M 上の位相 O となる．

定理 2.5　フロベニウスの条件をみたす M 上の r 次元分布 L^r に対して，点 p を通る任意の L^r の積分多様体が位相 O に関して $\mathcal{L}(p)$ の開部分多様体となる L^r の極大積分多様体 $\mathcal{L}(p)$ が存在する．

上記の定理における**極大積分多様体**は，この積分多様体が他の積分多様体の真部分集合ではないという意味である．詳細は Chevalley 1946, p.92 を参照されたい．

$f : M \longrightarrow N$ を滑らかな多様体 M から滑らかな多様体 N への滑らかな写像とする．このとき，$f : M \longrightarrow N$ は外微分形式の間の線形写像

$$f^* : A(N) \longrightarrow A(M)$$

を誘導する．実際，f は各点 $p \in M$ における接写像 $f_* : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ を誘導し，$A(N)$ と $A(M)$ の同次部分における写像 $f^* : A(N) \longrightarrow A(M)$ の定義は以下のとおりである．

任意の $\beta \in A^r(N)\,(r \geq 1)$ に対して，$f^*\beta \in A^r(M)$ を M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 $X_1, \ldots, X_r$ に対して

$$\langle X_1 \wedge \cdots \wedge X_r\,,\, f^*\beta \rangle_p = \langle f_*X_1 \wedge \cdots \wedge f_*X_r\,,\, \beta \rangle_{f(p)}\,, \qquad p \in M \tag{2.40}$$

と定義する．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は (2.7) の内積である．

任意の $\beta \in A^0(N)$ に対して

$$f^*\beta = \beta \circ f \in A^0(M) \tag{2.41}$$

と定義すれば，第 2 章の定理 3.2 によって，写像 f^* は外積に関して分配法則をみたす．すなわち，任意の $\omega, \eta \in A(N)$ に対して，

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta \tag{2.42}$$

が成り立つ．誘導写像 f^* の重要性は，f^* が外微分 d と可換であることにある．

定理 2.6　$f : M \longrightarrow N$ を滑らかな多様体 M からへの滑らかな多様体への滑らかな写像としよう．このとき，誘導写像 f^* は外微分 d と可換である．すなわち，

$$f^* \circ d = d \circ f^* : A(N) \longrightarrow A(M) \tag{2.43}$$

が成り立つ．つまり次の図形は可換である．

$$\begin{array}{ccc} A(N) & \xrightarrow{\ d\ } & A(N) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ A(M) & \xrightarrow{\ d\ } & A(M) \end{array}$$

証明　写像 f^* と d はそれぞれ線形写像なので，(2.43) の両辺を単項式 β に作用させて証明すれば十分である．

まず，β は N 上の滑らかな関数，すなわち $\beta \in A^0(N)$ としよう．M 上の任意の滑らかな接ベクトル X に対して，(2.40) より

$$\begin{aligned}\langle X\,,\, f^*(d\beta)\rangle &= \langle f_*X\,,\, d\beta\rangle \\ &= f_*X(\beta) \\ &= X(\beta\circ f) = \langle X\,,\, d(f^*\beta)\rangle\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$f^*(d\beta) = d(f^*\beta).$$

次に，$\beta = u\,dv$ としよう．ここで，u, v は N 上の滑らかな関数である．このとき，

$$\begin{aligned} f^*(d\beta) &= f^*(du\wedge dv) \\ &= f^*du \wedge f^*dv \\ &= d(f^*u)\wedge d(f^*v) = d(f^*\beta)\end{aligned}$$

となる．(2.43) は r より小さい次数の外微分形式に対して成り立つと仮定しよう．すると，(2.43) は r 次外微分形式に対しても成り立つことを示せばよい．r 次単項式 $\beta \in A^r(N)$ を

$$\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$$

ととろう．ここで，β_1 は N 上の 1 次微分形式で，β_2 は N 上の $(r-1)$ 次微分形式である．このとき，帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} d\circ f^*(\beta_1\wedge\beta_2) &= d(f^*\beta_1 \wedge f^*\beta_2) \\ &= d(f^*\beta_1)\wedge f^*\beta_2 - f^*\beta_1 \wedge d(f^*\beta_2) \\ &= f^*(d\beta_1\wedge\beta_2) - f^*(\beta_1\wedge d\beta_2) = f^*\circ d(\beta_1\wedge\beta_2)\end{aligned}$$

となる．□

§3-3　微分形式の積分

多様体の局所的な性質と大域的な性質との間のもっとも簡単な関係は多様体上の外微分形式の積分から得られる．この積分を定義するための準備をしよう．

定義 3.1　M 上に連続で 0 ではない m 次微分形式が存在するとき，滑らかな m 次元多様体 M を**向き付け可能**な多様体という．このような ω が存在する多様体 M は**向き付けられた**といわれる．正の関数因子しか異ならない上記の条件をみたす 2 つの M 上の微分形式があれば，それらは M 上に同じ**向き**を指定するという．

連結な向き付け可能な多様体には 2 つの向きがある．なぜならば，M の向きを指定する 2 つの m 次外微分形式 ω, ω' に対して，

$$\omega' = f\omega \tag{3.1}$$

が成り立つ 0 ではない連続関数 f が存在するからである．

M は連結であることから，f は M 全体に同じ符号をもつので，ω' に指定された向きは，ω に指定された向き，あるいは $-\omega$ に指定された向きのどちらかに一致する．

外微分形式 ω をもつ向き付けられた多様体 M に局所座標系 $(U; u^i)$ をとろう．このとき，$du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$ と $\omega|_U$ は 0 でない因子を除いて等しい．その因子が正ならば，$(U; u^i)$ を M の向きに**一致する**座標系とよぶ．明らかに各向き付けられた多様体に，その向きに一致する座標系が存在し，座標変換のヤコビ行列式はつねに正である．逆に，以下の単位分割の定理を用いると，その座標変換のヤコビ行列式の値が正となる M 上の座標系が存在すれば，M は向き付け可能である．(このことの証明は読者にまかせる．)

定義 3.2　M 上の実関数 $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，f の 0 ではない点の集合の閉包を **f の台**という，すなわち

$$\text{supp}\ f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}} \tag{3.2}$$

である．ϕ が外微分形式の場合，ϕ の台は

$$\text{supp}\ \phi = \overline{\{p \in M | \phi(p) \neq 0\}} \tag{3.3}$$

である．明らかに，supp ϕ の補集合は，その上で $\phi = 0$ となる M の最大開

部分集合である.

定義 3.3 Σ_0 を M の開被覆としよう. M の任意のコンパクトな部分集合が, Σ_0 の有限個の元と交差するとき, Σ_0 は M の**局所有限開被覆**といわれる.

定理 3.1 Σ を多様体 M の位相基としよう. このとき, M の局所有限開被覆である Σ の部分集合 Σ_0 が存在する.

証明 多様体の定義より M は局所コンパクトである. さらに, M は第二可算公理をみたすので, 各集合 U_i の閉包 $\overline{U}_i$ がコンパクトである M の可算開被覆 $\{U_i\}$ が存在する. さて,

$$P_i = \bigcup_{1\le r\le i} \overline{U}_r \tag{3.4}$$

とおくと, P_i はコンパクトで, $P_i \subset P_{i+1}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i = M$ である. ここで,

$$P_i \subset Q_i \subset \mathring{Q}_{i+1} \tag{3.5}$$

をみたす他のコンパクト集合 Q_i の列を構成しよう. ここで, $\mathring{Q}_{i+1}$ は Q_{i+1} の内点の集合である.

帰納法より, $Q_1, \ldots, Q_i$ を構成できるとしよう. $Q_i \cup P_{i+1}$ はコンパクトなので, $Q_i \cup P_{i+1}$ の被覆となる $\{U_j\}$ の有限個の元 $U_\alpha\ (1 \le \alpha \le s)$ が存在する. ここで

$$Q_{i+1} = \bigcup_{1\le\alpha\le s} \overline{U}_\alpha \tag{3.6}$$

とおくと, Q_{i+1} は条件 (3.5) をみたしている. まずはじめにわかることは, Q_{i+1} はコンパクトで, $P_{i+1} \subset Q_{i+1}$ である. さらに,

$$Q_i \subset \bigcup_{1\le\alpha\le s} U_\alpha \subset \mathring{Q}_{i+1} \tag{3.7}$$

が成り立つので, 明らかに $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = M$ となる.

次に,

$$L_i = Q_i - \mathring{Q}_{i-1}, \qquad K_i = \mathring{Q}_{i+1} - Q_{i-2} \tag{3.8}$$

とおくと, L_i はコンパクトで K_i は開集合であり $L_i \subset K_i$ となる. ここで, $1 \le i < +\infty$, $Q_{-1} = Q_0 = \varnothing$ である (図 9 参照).

仮定より, Σ は M の位相基なので, K_i は Σ の元の和集合で表せる. L_i はコンパクトで $L_i \subset K_i$ であるので, 各 i に対して

$$L_i \subset \bigcup_{1\le\alpha\le r_i} V_\alpha^{(i)} \subset K_i \tag{3.9}$$

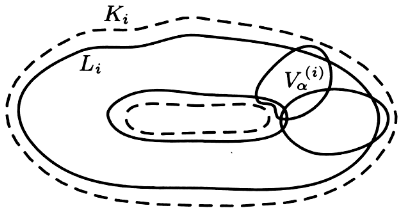


図 9

となる Σ の有限個の元 $V_\alpha^{(i)}$ $(1 \leq \alpha \leq r_i)$ が存在する．$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = M$ であるから，

$$\Sigma_0 = \{V_\alpha^{(i)},\ 1 \leq \alpha \leq r_i,\ 1 \leq i < +\infty\} \tag{3.10}$$

は Σ の部分被覆である．

さて，この Σ_0 は局所有限であることを示そう．任意のコンパクト集合 A に対して (3.4) より $A \subset P_i \subset Q_i$ となる十分大きな整数 i が存在することがわかる．$k \geq i+2$ に対して，

$$K_k = \mathring{Q}_{k+1} - Q_{k-2} \subset \mathring{Q}_{k+1} - Q_i \tag{3.11}$$

が成り立つので，$K_k \cap Q_i = \varnothing$ である．したがって，

$$V_\alpha^{(k)} \cap A \subset K_k \cap Q_i = \varnothing, \quad 1 \leq \alpha \leq r_k,\ k \geq i+2 \tag{3.12}$$

が成立する．すなわち，Σ_0 の有限個の元のみ A と交差する．　□

定理 3.2 (単位の分割定理)　Σ を滑らかな多様体 M の開被覆としよう．このとき，次の条件をみたす M 上の滑らかな関数族 $\{g_\alpha\}$ が存在する．

1) 各 α に対して $0 \leq g_\alpha \leq 1$ であり，$\mathrm{supp}\, g_\alpha$ はコンパクトである．さらに，$\mathrm{supp}\, g_\alpha \subset W_i$ となる開集合 $W_i \in \Sigma$ が存在する．
2) 各点 $p \in M$ において，有限個の $\mathrm{supp}\, g_\alpha$ と交差する近傍 U が存在する，
3) $\sum_\alpha g_\alpha = 1$.

条件 2) より，各点 $p \in M$ において，条件 3) の左辺の有限個の項は 0 ではない．よって，その和には意味がある．関数族 $\{g_\alpha\}$ は開被覆 Σ に従属する**単位の分割**とよばれる．

証明　M は多様体なので，各元 U_α は座標近傍で，かつ $\overline{U}_\alpha$ はコンパクトとなる位相基 $\Sigma_0 = \{U_\alpha\}$ が存在する．また $\overline{U}_\alpha \subset W_i$ となる $W_i \in \Sigma$ が存在する．定理 3.1 より，Σ_0 は局所有限開部分被覆をもつので，Σ_0 を M の可算局所有限開被覆と仮定して

よい．帰納法を用いて，U_α の縮小[4]により，$\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ で，$\{V_\alpha\}$ が M の開被覆である V_α が得られる．

§1-3 の補題 3 より，

$$h_\alpha(p) = \begin{cases} 1, & p \in V_\alpha \\ 0, & p \notin U_\alpha \end{cases} \tag{3.13}$$

となるような，M 上の滑らかな関数 h_α $(0 \leq h_\alpha \leq 1)$ が存在する．明らかに supp $h_\alpha \subset \overline{U}_\alpha$ である．したがって，$\overline{U}$ がコンパクトとなる．各点 $p \in M$ における近傍 U が存在する．Σ_0 は局所有限なので，$\overline{U}$ は Σ_0 の有限個の元のみと交差し，$\sum_\alpha h_\alpha(p)$ には 0 ではない有限個の項のみがある．よって，$h = \sum_\alpha h_\alpha$ は M 上の滑らかな関数である．さらに，$\{V_\alpha\}$ は M の被覆なので，点 p はある V_α に含まれる．すなわち $h(p) \geq 1$ となる．ここで

$$g_\alpha = \frac{h_\alpha}{h} \tag{3.14}$$

とおくと，g_α は M 上の滑らかな関数である．関数族 $\{g_\alpha\}$ が定理のすべての条件をみたすことは容易にわかる． □

上記の準備を用いて，外微分形式の多様体 M 上の積分を定義しよう．M は滑らかな m 次元多様体，φ はコンパクト台をもつ M 上の m 次微分形式としよう．M の向きに一致する任意の座標被覆 $\Sigma = \{W_i\}$ を選び，$\{g_\alpha\}$ は Σ に従属する単位の分割としよう．このとき，

$$\varphi = \left(\sum_\alpha g_\alpha\right) \cdot \varphi = \sum_\alpha (g_\alpha \cdot \varphi) \tag{3.15}$$

が成り立つ．明らかに，supp $(g_\alpha \cdot \varphi) \subset$ supp g_α はある座標近傍 $W_i \in \Sigma$ に含まれているので，

$$\int_M g_\alpha \cdot \varphi = \int_{W_i} g_\alpha \cdot \varphi \tag{3.16}$$

と定義できる．ここで，右辺は通常のリーマン積分である．すなわち，$g_\alpha \cdot \varphi$ を W_i における座標系 $u^1, \ldots, u^m$ を用いて

$$f(u^1, \ldots, u^m) du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$$

4) この縮小を説明しよう．$W = \bigcup_{i \neq \alpha} U_i$ とおくと，$M - W$ は U_α に含まれている閉集合である．$\overline{U}_\alpha$ はコンパクトなので，$M - W$ もコンパクトである．したがって，$\overline{W}_s \subset U_\alpha$，$\bigcup_{s=1}^{r} W_s \subset M - W$ となる有限個の座標近傍 W_s $(1 \leq s \leq r)$ が存在する．次に $V_\alpha = \bigcup_{s=1}^{r} W_s$ とおけばよい．

と表すと，(3.16) の右辺の積分は

$$\int_{W_i} f(u^i, \ldots, u^m)\, du^1 \cdots du^m \tag{3.17}$$

となる．

(3.16) の定義には意味があることを証明するには，その右辺が W_i のとり方によらないことを示せば十分である． supp $(g_\alpha \cdot \varphi)$ は 2 つの座標近傍 W_i, W_j に含まれ，M の向きに一致する局所座標をそれぞれ u^k, v^k とする．このとき，座標変換のヤコビ行列の行列式の値は

$$J = \frac{\partial(v^1, \ldots, v^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^m)} > 0 \tag{3.18}$$

をみたす．$g_\alpha \cdot \varphi$ を W_i, W_j で

$$\begin{aligned} g_\alpha \cdot \varphi &= f du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \\ &= f' dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^m \end{aligned} \tag{3.19}$$

とそれぞれ表すと，

$$f = f' \cdot J = f' \cdot |J| \tag{3.20}$$

であり，

$$\text{supp } f = \text{ supp } f' = \text{ supp } (g_\alpha \cdot \varphi) \subset W_i \cap W_j$$

が成り立つ．リーマン積分の置換積分法より

$$\begin{aligned} \int_{W_i \cap W_j} f'\, dv^1 \cdots dv^m &= \int_{W_i \cap W_j} f' |J|\, du^1 \cdots du^m \\ &= \int_{W_i \cap W_j} f\, du^1 \cdots du^m \end{aligned}$$

となる．すなわち

$$\int_{W_i} g_\alpha \cdot \varphi = \int_{W_j} g_\alpha \cdot \varphi \tag{3.21}$$

が成り立つ．

supp φ はコンパクトなので，単位分割定理の条件 2) より，有限個の supp g_α は交差している．したがって，(3.15) の右辺は有限個の和である．ここで

$$\int_M \varphi = \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot \varphi \tag{3.22}$$

とおくと，Σ に従属した任意の単位の分割 $\{g_\alpha\}$ に対して (3.22) の右辺は完全に決まる．次に (3.22) は単位の分割 $\{g_\alpha\}$ のとり方によらないことを示そう．

$\{g'_\beta\}$ を Σ に従属した他の単位の分割としよう．このとき，

$$\sum_\beta \int_M g'_\beta \cdot \varphi = \sum_\beta \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot g'_\beta \cdot \varphi$$
$$= \sum_\alpha \int_M \sum_\beta g'_\beta \cdot g_\alpha \cdot \varphi = \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot \varphi$$

が成り立つ．

定義 3.4 M を向き付けられた滑らかな m 次元多様体とし，φ をコンパクト台をもつ M 上の m 次外微分形式としよう．(3.22) で定義した $\int_M \varphi$ の値を外微分形式 φ の M 上の**積分**という．

M 上のコンパクト台をもつ m 次外微分形式 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ に対して $\varphi_1 + \varphi_2, c\varphi$ はコンパクト台をもつ．ここで c は任意の実数である．積分の定義より

$$\int_M (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_M \varphi_1 + \int_M \varphi_2, \qquad \int_M c\varphi = c\int_M \varphi \tag{3.23}$$

となり，積分 $\int_M$ は M 上のコンパクト台をもつ m 次外微分形式の全体の上の線形汎関数である．

次に，$\mathrm{supp}\,\varphi$ が M の向きに一致する局所座標 u^i の座標近傍 U に含まれていれば，φ は

$$\varphi = f(u^1, \ldots, u^m)du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \tag{3.24}$$

となり，$\int_M \varphi$ はリーマン積分

$$\int_M \varphi = \int_U f\, du^1 \cdots du^m \tag{3.25}$$

である．したがって，定義 3.4 はリーマン積分の一般化である．

$r < m$ のとき，コンパクト台をもつ r 次外微分形式 φ に対して M の任意の r 次元部分多様体 N における φ の積分が定義できる．N の M への r 次元埋め込み

$$h : N \longrightarrow M \tag{3.26}$$

をとれば，$h^*\varphi$ はコンパクト台をもつ滑らかな r 次元部分多様体 N における r 次外微分形式である．よって，積分 $\int_N h^*\varphi$ の定義には意味がある．部分多様体 $h(N)$ における φ の積分を

$$\int_{h(N)} \varphi = \int_N h^*\varphi \tag{3.27}$$

で定義する．

§3-4　ストークスの公式

ある領域内の積分とその領域の境界上の積分との間の関係がストークスの公式の核心である．まず，いくつかの例をみてみよう．

例 1. $\mathbb{R}^1$ 内の閉区間 $D = [a, b]$ と D 上の連続可微分関数 f に対して，微積分学の基本定理より

$$\int_D df = f(b) - f(a) \tag{4.1}$$

が成り立つ．D の向き付けられた境界 $\{b\} - \{a\}$ を ∂D とおくと，上記の右辺は $\int_{\partial D} f$ とかくことができる．

例 2. $\mathbb{R}^2$ の向きに一致する $\mathbb{R}^2$ 内の向き付けられた有界な領域 D をとり，D に誘導された向きをもつ D の向き付けられた境界を ∂D とおこう．すなわち，∂D の正の向きと D の内向き法線の組は $\mathbb{R}^2$ の向きに一致する座標系となる (図 10 参照)．D 上の連続可微分関数 P と Q に対して，グリーンの公式

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \tag{4.2}$$

が成り立つ．

ここで，$\omega = P\,dx + Q\,dy$ とおくと，

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

となり，(4.2) は

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \tag{4.3}$$

とかける．

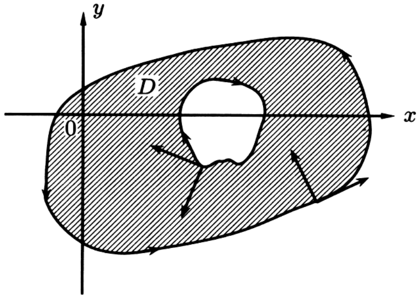


図 10

例 3. $\mathbb{R}^3$ の向きに一致する $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた有界な領域 D をとろう．外向き法線が正方向を決めることにすれば，それは境界 ∂D に向きを誘導する．このとき，D 上の連続可微分関数 P, Q, R に対して，ガウスの公式は

$$\int_{\partial D} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \quad (4.4)$$

または,

$$\int_{\partial D} \varphi = \int_D d\varphi \quad (4.5)$$

となる．ここで，$\varphi = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ とした．

例 4. $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた曲面 Σ をとり，その境界 $\partial\Sigma$ は向き付けられた閉曲線であるとしよう．このとき，$\partial\Sigma$ の正の向きと Σ における任意の正の法線との組は右手系をみたす．(ここで，$\mathbb{R}^3$ は向き付けられた右手系であると仮定する．)　Σ を含む領域上の連続可微分関数 P, Q, R に対して，ストークスの公式

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \iint_\Sigma \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \right\}\end{aligned} \quad (4.6)$$

が成り立つ．ここで

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

とおくと，上記の式は

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega \tag{4.7}$$

となる．

外微分形式の記号を用いると，上記の四つの式は統一した形でかける．本章で紹介するストークスの公式は，上記の式の多様体の場合における一般化である．

定義 4.1　M は滑らかな m 次元多様体としよう．次の 2 種類の点からなる M の部分集合 D を**境界をもつ領域** D という．

1) **内点**は，各点が D に含まれる M 上の近傍をもつ点である．

2) **境界点** p は，$u^i(p) = 0$ と

$$U \cap D = \{q \in U \,|\, u^m(q) \geq 0\} \tag{4.8}$$

が成り立つ座標系 $(U; u^i)$ をもつ点である．

上記の性質をもつ座標系 u^i を境界点 p における**適合している座標系**という．D の境界点の全体は D の**境界**といい，B と表すことにする．

定理 4.1　境界をもつ領域 D の境界 B は正則に埋め込まれた閉部分多様体である．M が向き付け可能なとき，B も向き付け可能である．

証明　領域 D の境界 B は明らかに M の閉部分集合である．許容座標近傍 $(U; u^i)$ に対して

$$U \cap B = \{q \in U \,|\, u^m(q) = 0\} \tag{4.9}$$

が成り立つので，第 1 章の定義 3.2 により，B は M の正則に埋め込まれた閉部分多様体であることがわかる．

M を向き付け可能な多様体とし，任意の点 $p \in B$ における M の向きに一致する適合している座標近傍 $(U; u^i)$ を選ぼう．このとき，$(u^1, \ldots, u^{m-1})$ は B の点 p における座標系である．点 p の座標近傍 $U \cap B$ における境界 B の向きを

$$(-1)^m du^1 \wedge \cdots \wedge du^{m-1} \tag{4.10}$$

で表そう．ここで，与えられた座標近傍で，上記のような向きは一致していることを示そう．境界点 p における M の向きに一致する他の座標近傍 $(V; v^i)$ をとると，

$$\frac{\partial(v^1, \ldots, v^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^m)} > 0 \tag{4.11}$$

が成り立つ．$v^m = f^m(u^1, \ldots, u^m)$ とおくと，任意の固定した $u^1, \ldots, u^{m-1}$ に対し

て変数 v^m の符号は u^m の符号と同じであり，$u^m=0$ ならば $v^m=0$ となる．よって，点 p で $\dfrac{\partial v^m}{\partial u^m}>0$ である．一般性を失うことなく $v^m=u^m$ としてよい．このとき，(4.11) は

$$\frac{\partial(v^1,\ldots,v^{m-1})}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})}>0 \tag{4.12}$$

となり，$(-1)^m du^1\wedge\cdots\wedge du^{m-1}$ と $(-1)^m dv^1\wedge\cdots\wedge dv^{m-1}$ はそれぞれ $U\cap V\cap B$ に互いに一致する向きを誘導する．したがって，B は向き付け可能である． □

(4.10) で与えられる B の向きを，向き付けられた多様体 M から境界 B に**誘導された向き**という．D が M と同じ向きをもつ場合，誘導された向きをもつ境界 B を ∂D で表すことにする．上記の四つの例における ∂D, $\partial\Sigma$ の向きはこのように誘導されることが容易にわかる．

定理 4.2 (**ストークスの公式**) D は向き付けられた m 次元多様体 M の境界をもつ領域，ω を M 上のコンパクト台をもつ $(m-1)$ 次外微分形式としよう．このとき，

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega \tag{4.13}$$

が成り立つ．$\partial D=\varnothing$ の場合，右辺の積分の値は 0 となる．

証明 $\{U_i\}$ を M の向きと一致する M の座標系とし，$\{g_\alpha\}$ はそれにともなう単位の分割としよう．このとき，

$$\omega=\sum_\alpha g_\alpha\cdot\omega \tag{4.14}$$

が成立する． $\mathrm{supp}\,\omega$ はコンパクトなので，上記の式の右辺は有限項の和であり，

$$\int_D d\omega=\sum_\alpha\int_D d(g_\alpha\cdot\omega),\qquad \int_{\partial D}\omega=\sum_\alpha\int_{\partial D}g_\alpha\cdot\omega \tag{4.15}$$

となる．したがって，各 α に対して

$$\int_D d(g_\alpha\cdot\omega)=\int_{\partial D}g_\alpha\cdot\omega \tag{4.16}$$

のみを証明すればよい． $\mathrm{supp}\,\omega$ は M の向きと一致する座標近傍に含まれているとしよう．ω を

$$\omega=\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}a_j du^1\wedge\cdots\wedge\widehat{du^j}\wedge\cdots\wedge du^m \tag{4.17}$$

で表すと，

$$d\omega=\left(\sum_{j=1}^m\frac{\partial a_j}{\partial u^j}\right)du^1\wedge\cdots\wedge du^m \tag{4.18}$$

が成り立つ．ここで a_j は U 上の滑らかな関数である．このとき，次の 2 つの場合を考えよう．

1) $U \cap \partial D = \varnothing$ のとき，(4.13) の右辺は 0 となるので，U は $M-D$ または D の内点からなる集合に含まれていることとなる．前者の場合には，(4.13) の左辺は明らかに 0 となり，後者の場合，

$$\int_D d\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \cdots du^m \tag{4.19}$$

が成り立つ．U を含む立方体 $C = \{u \in \mathbb{R}^m \big| |u^i| \leq K, 1 \leq i \leq m\}$ を考えよう．関数 a_j を U の外側は 0 であるようにして立方体 C に拡張する．このとき，明らかに a_j は C 上の連続可微分関数である．したがって，

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j}\, du^1 \cdots du^m &= \int_C \frac{\partial a^j}{\partial u^j}\, du^1 \cdots du^m \\ &= \int_{\substack{|u^i| \leq K \\ i \neq j}} \left(\int_{-K}^{+K} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j \right) du^1 \cdots du^{j-1} du^{j+1} \cdots du^m \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.20}$$

が成り立つ．しかし，

$$\begin{aligned}\int_{-K}^{+K} \frac{\partial a_j}{\partial u^j}\, du^j &= a_j(u^1, \ldots, u^{j-1}, K, u^{j+1}, \ldots, u^m) \\ &\quad - a_j(u^1, \ldots, u^{j-1}, -K, u^{j+1}, \ldots, u^m) \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.21}$$

より，(4.20) の最後の積分は 0 となる．

2) $U \cap \partial D \neq \varnothing$ のとき，U は M の向きに一致する適合している座標近傍としよう．このとき

$$U \cap D = \{q \in U | u^m(q) \geq 0\}, \tag{4.22}$$

$$U \cap \partial D = \{q \in U | u^m(q) = 0\} \tag{4.23}$$

が成り立つ．立方体

$$C = \{u \in \mathbb{R}^m \big| |u^i| \leq K,\ 1 \leq i \leq m-1;\ 0 \leq u^m \leq K\}$$

を考えると，K が十分大きいとき，$U \cap D$ は C の内部とその境界 $u^m = 0$ の和集合に含まれている．1) と同様に a_j を拡張すれば，(4.13) の右辺は

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \omega &= \int_{U \cap \partial D} \omega \\ &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int_{U \cap \partial D} a_j\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^{j-1} \wedge du^{j+1} \wedge \cdots \wedge du^m\end{aligned}$$

$$= (-1)^{m-1} \int_{U \cap \partial D} a_m \, du^1 \wedge \cdots \wedge du^{m-1}$$

$$= - \int_{\substack{|u^i| \le K \\ 1 \le i \le m-1}} a_m(u^1, \ldots, u^{m-1}, 0) du^1 \cdots du^{m-1} \tag{4.24}$$

となる．ここで，$U \cap \partial D$ 上では $du^m = 0$ なので，(4.24) の第 3 番目の式が成り立つ．また (4.24) の最後の式には ∂D に M より誘導された向きを用いた．

一方，(4.13) の左辺は

$$\int_D d\omega = \int_{D \cap U} d\omega$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{D \cap U} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \tag{4.25}$$

となり，$1 \le j \le m-1$ の場合，

$$\int_{D \cap U} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$$

$$= \int_{\substack{|u^i| \le K, i \ne j, m \\ 0 \le u^m \le K}} \left(\int_{-K}^{+K} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j \right) du^1 \cdots du^{j-1} du^{j+1} \cdots du^m$$

$$= 0 \tag{4.26}$$

が成り立つ．よって，(4.25) で 0 ではない項はただ一つで，それは

$$\int_{D \cap U} \frac{\partial a_m}{\partial u^m} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$$

$$= \int_{|u^i| \le K, i \ne m} \left(a_m(u^1, \ldots, u^{m-1}, K) - a_m(u^1, \ldots, u^{m-1}, 0) \right) du^1 \cdots du^{m-1}$$

$$= - \int_{|u^i| \le K, i \ne m} a_m(u^1, \ldots, u^{m-1}, 0) du^1 \cdots du^{m-1} \tag{4.27}$$

である．したがって，(4.13) が成り立ち定理は証明された．□

注意. 多くの場合，閉領域 D はコンパクトである．この場合，$(m-1)$ 次外微分形式がコンパクト台をもつと仮定しなくても，ストークスの公式は成立する．

ストークスの公式は，物理，力学，偏微分方程式論，微分幾何学の分野では重要である．積分は領域に対して加法的なので，外微分形式の積分を**特異鎖**[5)]上にも定義できる．

積分を外微分形式と積分領域との間の対応とみなすと，各外微分形式は M 上の**特異双対鎖**と同値であり，ストークスの公式は境界作用素 ∂ と双対境界作用

5) 例えば，Singer and Thorpe 1976 を参照．

素 d との間の双対性を記述している.

$$\begin{aligned}(\partial D, \omega) &= \int_{\partial D} \omega, \\ (D, d\omega) &= \int_D d\omega\end{aligned} \tag{4.28}$$

とおくと，ストークスの公式は

$$(\partial D, \omega) = (D, d\omega) \tag{4.29}$$

となる.

なお，$A^r(M)$ を双対鎖群とみなすと，$d : A^r(M) \longrightarrow A^{r+1}(M)$ は双対境界作用素であり，$d \circ d = 0$ (ポアンカレの補題) である．ここで，

$$\begin{cases} Z^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in A^r(M) | d\omega = 0\}, \\ B^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in A^r(M) | \omega = d\beta,\ \exists\beta \in A^{r-1}(M)\} \end{cases} \tag{4.30}$$

とおくと，$Z^r(M, \mathbb{R})$ は準同形写像 $d : A^r(M) \longrightarrow A^{r+1}(M)$ の核となり，$B^r(M, \mathbb{R})$ は準同形写像 $d : A^{r-1}(M) \longrightarrow A^r(M)$ の像である．$Z^r(M, \mathbb{R})$ の元を**閉微分形式**といい，$B^r(M, \mathbb{R})$ の元を**完全微分形式**という．したがって，ポアンカレの補題より

$$B^r(M, \mathbb{R}) \subset Z^r(M, \mathbb{R}) \tag{4.31}$$

が成り立つ.

ただし，閉微分形式は必ずしも完全微分形式とは限らない．下記のド・ラムの定理は，M 上の閉微分形式が完全微分形式となるための M の位相幾何学的な性質を述べている.

定義 4.2　商空間

$$H^r(M, \mathbb{R}) = Z^r(M, \mathbb{R}) / B^r(M, \mathbb{R}) \tag{4.32}$$

を M 上の r 次**ド・ラムのコホモロジー群**という.

定理 4.3 (**ド・ラムの定理**)　コンパクト滑らかな多様体 M に対して，r 次ド・ラムのコホモロジー群は，M の r 次コホモロジー群と同形である．ここで

$$\dim H^r(M, \mathbb{R}) = b_r$$

とおくと，b_r は M の r **次ベッチ数**である.

この定理の系として，M の r 次ベッチ数が 0 ならば，M の任意の閉 r 次微分形式は完全微分形式であることがわかる．特に，M のすべてのベッチ数 $(r \geq 1)$ が 0 ならば，M の任意の閉微分形式は完全である．

ド・ラム群 $H^r(M, \mathbb{R})$ は多様体の可微分構造に由来するが，ベッチ数は多様体の純数な位相的不変量である．したがって，ド・ラムの定理は，多様体の局所的な性質と大域的な性質との間の関係を示している．ド・ラムの定理のもっとも明解な証明には**層**の概念を必要とする．その証明の詳細は Singer and Thorpe 1976 を参照されたい．

最後に，定理 2.6 をホモロジー理論の観点から考えよう．任意の滑らかな写像 $f : M \longrightarrow N$ は双対境界作用素 d と可換である準同形写像

$$f^* : A^r(N) \longrightarrow A^r(M)$$

を誘導する．写像 f^* は**鎖写像**とよばれる．ここで $\omega \in Z^r(N, \mathbb{R})$ に対して

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$$

となるので，$f^*\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$ であり，f^* は $Z^r(N, \mathbb{R})$ から $Z^r(M, \mathbb{R})$ への準同形写像である．同様に，f^* は $B^r(N, \mathbb{R})$ から $B^r(M, \mathbb{R})$ への準同形写像を誘導するので，f^* はド・ラム群 $H^r(N, \mathbb{R})$ と $H^r(M, \mathbb{R})$ の間の準同形写像

$$f^* : H^r(N, \mathbb{R}) \longrightarrow H^r(M, \mathbb{R})$$

を誘導する．

また，定理 2.6 の系として，M から N への滑らかな写像 $f : M \longrightarrow N$ はド・ラムのコホモロジー群 $H^r(N, \mathbb{R})$ からド・ラムのコホモロジー群 $H^r(M, \mathbb{R})$ への準同形写像 f^* を誘導することもわかる．

4

接　　続

ベクトル束の切断，すなわち多様体のベクトル場を**微分する**ために，ベクトル束に接続という構造を導入する必要がある．例えば，アファイン接続は，可微分多様体上のテンソル場を**微分する**ために与えられた構造である．最初に，ベクトル束の接続の一般論からはじめる．

§4-1　ベクトル束の接続

ベクトル束とその切断は§3-1ですでに説明した．E を M 上の q 次元実ベクトル束，$\Gamma(E)$ を E の M 上の滑らかな切断の集合としよう．このとき，$\Gamma(E)$ は実ベクトル空間であり，さらに $C^\infty(M)$ 加群でもある．

定義 1.1　ベクトル束 E における**接続**とは，次の条件

1)　任意の $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ に対して

$$D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2,$$

2)　任意の $s \in \Gamma(E)$, $\alpha \in C^\infty(M)$ に対して

$$D(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha Ds,$$

をみたす写像

$$D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes E) \tag{1.1}$$

である．

M の滑らかな接ベクトル X と任意の $s \in \Gamma(E)$ に対して

$$D_X s = \langle X\,,\, Ds \rangle \tag{1.2}$$

とおく．ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は $T(M)$ と $T^*(M)$ の元の内積である．このとき，$D_X s$ は，**絶対微分商**あるいは切断 s の X に沿っての**共変微分**とよばれる E の切断である．

注意 1. $\alpha=-1$ に対して，上記の条件 2) によって

$$D(-s)=-Ds \tag{1.3}$$

となる．したがって，D は零切断を零切断に写す．よって，D は $\Gamma(E)$ から $\Gamma(T^*(M)\otimes E)$ への線形作用素である．

注意 2. D は E の切断の作用素であるが，局所的な性質をもっている．E の切断 s_1, s_2 に対して s_1, s_2 の M の開部分集合 U への制限が互いに等しいとき，Ds_1 と Ds_2 の U への制限も等しくなる．このことの証明は d の局所性質の証明と同様である (第 3 章の定理 2.1 を参照のこと)．D の線形性より，s の開集合 $U\subset M$ への制限が 0 であれば，そのとき $Ds|_U=0$ となることを証明すればよい．

このことをみるために，まず任意の点 $p\in U$ を選ぶ．このとき，$p\in V\subset \bar{V}\subset U$ となる開集合 V が存在する．§1-3 の補題 3 より，M 上に

$$h(p')=\begin{cases}1, & p'\in V,\\ 0, & p'\notin U\end{cases}$$

をみたす滑らかな関数 h がある．よって，hs は E の零切断となるので，注意 1 と接続の条件 2) より

$$0=D(hs)=dh\otimes s+hDs$$

となる．ここで V 上で $dh=0$ なので

$$Ds(p)=0$$

が得られる．点 $p\in U$ は任意なので，$Ds|_U=0$ となる．

D の局所的な性質を用いて，D を局所切断上の作用素として定義できる．要するに，開集合 $U\subset M$ 上で定義された切断 s に対して，§1-3 の補題 3 より，任意の点 $p\in U$ に対して，$\widetilde{s}$ と s が p のある近傍上で一致するような E の切断 $\widetilde{s}$ が存在する．ここで

$$Ds(p)=D\widetilde{s}(p) \tag{1.4}$$

とおくと，p の近傍で $D\widetilde{s}$ の値は $\widetilde{s}$ の選び方によらないので，この定義は意味をもつことがわかる．したがって，Ds は U の切断である．

注意 3. (1.2) より，D は，$\Gamma(T(M)) \times \Gamma(E)$ から $\Gamma(E)$ への作用素であり，次の性質をみたす．M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 X, Y, E の切断 s, s_1, s_2, $\alpha \in C^\infty(M)$ に対して，

1) $D_{X+Y}s = D_X s + D_Y s$,
2) $D_{\alpha X}s = \alpha D_X s$,
3) $D_X(s_1 + s_2) = D_X s_1 + D_X s_2$,
4) $D_X(\alpha s) = (X\alpha)s + \alpha D_X s$

である．上記の条件は絶対微分の定義から得られるものである．

注意 2 に述べたように，絶対微分作用素は次の局所的な性質をみたす．

1) X_1, X_2 を点 $p \in M$ における任意の接ベクトル場とし，$X_1(p) = X_2(p)$ とする．このとき，E の任意の切断 s に対して，$D_{X_1}s$ と $D_{X_2}s$ の点 p における値は同じである．したがって，点 $p \in M$ における接ベクトルに関する E の切断の共変微分を定義できる．すなわち，$X \in T_p(M)$ に対して，D_X は $\Gamma(E)$ から E_p への写像である．
2) 写像 $D_X : \Gamma(E) \longrightarrow E_p$ $(X \in T_p(M))$ に対して，X に接する M 上のパラメーター曲線上の切断 s_1, s_2 の値が等しければ，$D_X s_1 = D_X s_2$ となる．

この局所的な性質の証明は注意 2 の証明と同様なので，詳細は読者にまかせる．局所的には，接続は 1 次微分形式の集合で表すことができる．U を局所座標 u^i $(1 \le i \le m)$ をもつ M 上の座標近傍としよう．いたるところ 1 次独立である q 個の U 上の E の切断 s_α $(1 \le \alpha \le q)$ を選ぼう．これらは，U 上の E の**局所標構場**とよばれ，任意の点 $p \in U$ における $\{du^i \otimes s_\alpha, 1 \le i \le m, 1 \le \alpha \le q\}$ はテンソル空間 $T_p^* \otimes E_p$ の基底となる．

Ds_α は U 上の束 $T^*(M) \otimes E$ の局所的な切断なので，

$$Ds_\alpha = \sum_{1 \le i \le m, 1 \le \beta \le q} \Gamma_{\alpha i}^\beta du^i \otimes s_\beta \tag{1.5}$$

とかける．ここで，$\Gamma_{\alpha i}^\beta$ は U 上の滑らかな関数である．ここで

$$\omega_\alpha^\beta = \sum_{1 \le i \le m} \Gamma_{\alpha i}^\beta du^i \tag{1.6}$$

とおくと，(1.5) は

$$Ds_\alpha = \sum_{\beta=1}^q \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta \tag{1.7}$$

となる．計算を簡単にするため，行列を導入しょう．局所標構場の列ベクトルを S, ω_α^β を成分とする行列を ω と表す，すなわち

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_q \end{pmatrix}, \qquad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_q^1 & \cdots & \omega_q^q \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

このとき，(1.7) は

$$DS = \omega \otimes S \tag{1.9}$$

とかける．この行列 ω を**接続行列**とよぶ．これは，局所標構場の選び方に依存する．

次に，U 上の別な局所標構場 $S' = {}^t(s_1', \ldots, s_q')$ をとれば，

$$S' = A \cdot S \tag{1.10}$$

が成り立つ．ここで

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_q^1 & \cdots & a_q^q \end{pmatrix}$$

であり，a_i^j は U 上の滑らかな関数で，$\det A \neq 0$ である．接続 D の局所標構場 S' に関する行列を ω' とかくと，接続の定義 1.1 より

$$\begin{aligned} DS' &= dA \otimes S + A \cdot DS \\ &= (dA + A \cdot \omega) \otimes S \\ &= (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}) \otimes S' \end{aligned} \tag{1.11}$$

が成り立つ．したがって，

$$\omega' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1} \tag{1.12}$$

となる．この式は局所標構場の変換における接続行列の変換式であり，微分幾何学のもっとも重要な式のうちの一つである．

逆に，M 上の座標系 $\{U, W, Z, \ldots\}$ を選ぼう．さらに，各 U に E の局所標構場を選び，座標近傍の共通部分で変換式 (1.12) をみたす $q \times q$ 型の 1 次微分形式行列 ω_U を考えよう．すなわち，$U \cap W \neq \varnothing$ 上で

$$S_W = A_{WU} \cdot S_U \tag{1.13}$$

のとき,

$$\omega_W = dA_{WU} \cdot A_{WU}^{-1} + A_{WU} \cdot \omega_U \cdot A_{WU}^{-1} \tag{1.14}$$

が成り立つ．ここで A_{WU} は $U \cap W$ の滑らかな関数の $q \times q$ 型行列である．さらに，各座標近傍 U での接続行列は ω_U に一致するような E の接続 D が存在する．このことを証明しよう．

いま，U 上で

$$s = a_U \cdot S_U \tag{1.15}$$

と表せる E の任意の切断 s に対して，Ds を U 上で

$$Ds|_U = (da_U + a_U \cdot \omega_U) \otimes S_U \tag{1.16}$$

とおこう．ここで，$a_U = \left(a_U^1, \ldots, a_U^q\right)$ で，a_U^i は U 上の滑らかな関数である．このとき，$U \cap W \neq \varnothing$ のとき，$U \cap W$ 上で

$$(da_U + a_U \cdot \omega_U) \otimes S_U = (da_W + a_W \cdot \omega_W) \otimes S_W \tag{1.17}$$

が成り立つことを示そう．これがいえると，(1.16) で定義した Ds は M の切断であることがわかる．

まず，(1.13) より，$U \cap W$ で

$$\begin{cases} a_U = a_W \cdot A_{WU}, \\ da_U = da_W \cdot A_{WU} + a_W \cdot dA_{WU} \end{cases} \tag{1.18}$$

が成り立つ．したがって，(1.14) より，$U \cap W$ で

$$\begin{aligned}
&\left(da_U + a_U \cdot \omega_U\right) \otimes S_U \\
&\quad = \left(da_W \cdot A_{WU} + a_W \cdot dA_{WU} + a_W \cdot A_{WU} \cdot \omega_U\right) \otimes \left(A_{WU}^{-1} \cdot S_W\right) \\
&\quad = \left(da_W + a_W \cdot dA_{WU} \cdot A_{WU}^{-1} + a_W \cdot \omega_W - a_W \cdot dA_{WU} \cdot A_{WU}^{-1}\right) \otimes S_W \\
&\quad = \left(da_W + a_W \cdot \omega_W\right) \otimes S_W
\end{aligned} \tag{1.19}$$

となる．

(1.16) で定義された写像 $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes E)$ は定義 1.1 の条件をみたすことが容易にわかる．したがって，D は E の接続となり，明らかに U 上の D の接続行列は ω_U である．

定理 1.1　ベクトル束にはつねに接続が存在する．

証明　M 上の座標被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を選ぼう．ベクトル束は局所的には自明な束であるので，各 U_α に一つの局所標構場 S_α が存在するとしてよい．接続の局所的な構造に基づいて，局所標構場の変換に対して (1.12) をみたすような各 U_α 上での $q\times q$ 型行列 ω_α をつくればよい．

§3-3 に述べたように，$\{U_\alpha\}$ は局所有限であり，$\{g_\alpha\}$ は supp $g_\alpha\subset U_\alpha$ であるような付随する単位分割としてよい．$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ の場合，

$$S_\alpha = A_{\alpha\beta}\cdot S_\beta, \qquad \det A_{\alpha\beta}\neq 0 \tag{1.20}$$

をみたす $U_\alpha\cap U_\beta$ 上の滑らかな非退化関数行列 $A_{\alpha\beta}$ が存在する．

任意の $\alpha\in\mathcal{A}$ に対して，U_α 上の任意の 1 次微分形式の $q\times q$ 型行列 φ_α を選ぼう．このとき，

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{A}} g_\beta\cdot\left(dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\cdot\varphi_\beta\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}\right) \tag{1.21}$$

とおくと，ω_α は U_α 上の 1 次微分形式の行列となる．ここで，上記の和の $U_\beta\cap U_\alpha=\varnothing$ における項はすべて 0 である．すると，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ の場合，変換式

$$\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\cdot\omega_\beta\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} \tag{1.22}$$

を直接計算で示せばよい．このためには，$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\varnothing$ の場合，

$$A_{\alpha\beta}\cdot A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma}$$

は共通部分集合で成り立つ．したがって，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 上で

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}\cdot\omega_\beta\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} &= \sum_{\substack{\gamma \\ U_\gamma\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing}} g_\gamma\cdot A_{\alpha\beta}\cdot\left(dA_{\beta\alpha}\cdot A_{\beta\alpha}^{-1} + A_{\beta\gamma}\cdot\varphi_\gamma\cdot A_{\beta\gamma}^{-1}\right)\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= \omega_\alpha - dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} \end{aligned}$$

となる．よって (1.22) が示された．上記の証明より，接続を自由に選べることがわかる．　□

特に，(1.21) で $\varphi_\beta=0$ とすると，U_α 上の接続行列が

$$\omega_\alpha = \sum_\beta g_\beta\cdot\left(dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}\right)$$

である E の接続 D が得られる．

接続行列の変換式 (1.12) により，接続行列のすべての元が 0 になる性質は不変でないことがわかる．事実，任意の接続に対して，ある点 p における接続行列のすべての元が 0 となる局所標構場がつねに選べる．このことは接続関係の計算を行う際に役に立つ．

定理 1.2 点 $p \in M$ で D はベクトル束 E の接続としよう．このとき，p における接続行列のすべての元は 0 であるような p の座標近傍における局所標構場が存在する．

証明 $u^i(p) = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ となるような p の座標近傍 $\big((U; u^i)\big)$ を選び，S' を接続行列 $\omega' = (\omega'^{\beta}_{\alpha})$ をもつ U 上の局所標構場としよう．ここで，

$$\omega'^{\beta}_{\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\beta}_{\alpha i} u^i \tag{1.23}$$

とする．ただし $\Gamma'^{\beta}_{\alpha i}$ は U 上の滑らかな関数である．ここで

$$a^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\beta}_{\alpha i}(p) \cdot u^i \tag{1.24}$$

とおくと，$A = (a^{\beta}_{\alpha})$ は p における単位行列である．したがって，V 上で A は非退化である p における近傍 $V \subset U$ が存在する．よって，

$$S = A \cdot S' \tag{1.25}$$

は V の局所標構場であり，

$$dA(p) = -\omega'(p)$$

が成り立つので，(1.12) より

$$\begin{aligned} \omega(p) &= (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega' \cdot A^{-1})(p) \\ &= -\omega'(p) + \omega'(p) = 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

が得られる．すなわち，S は定理をみたす局所標構場である．　□

なお，(1.12) を外微分すれば，

$$d\omega' \cdot A - \omega' \wedge dA = dA \wedge \omega + A \cdot d\omega \tag{1.27}$$

となる．ここで，行列の外積 $\wedge$ は，積行列の元はもとの行列の元の外積であるという意味である．(1.12) より $dA = \omega' \cdot A - A \cdot \omega$ となり，これを (1.27) に代入すれば，

$$(d\omega' - \omega' \wedge \omega') \cdot A = A \cdot (d\omega - \omega \wedge \omega) \tag{1.28}$$

が得られる．

定義 1.2 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ を U 上の接続 D の**曲率行列**とよぶ．

したがって，(1.28) は

$$\Omega' = A \cdot \Omega \cdot A^{-1} \tag{1.29}$$

とかける．この式は，局所標構場の変換における曲率行列の変換式である．さらに，Ω の変換式は同次であるが，接続行列 ω の変換式は同次ではない．この曲率行列 Ω は多くの情報を含んでいる．特に，M 上の大域的な微分形式をつくることができる (§7-4 参照).

M の任意の接ベクトル X, Y に対して，曲率行列 Ω は $\Gamma(E)$ から $\Gamma(E)$ への線形写像 $R(X,Y)$ を誘導する．すなわち，任意の接ベクトル $X, Y \in T_p(M)$ $(p \in U)$ に対して，Ω を用いてファイバー $\pi^{-1}(p)$ から自分自身への線形写像 $R(X,Y)$ を次のよう定義できる．$s \in \pi^{-1}(p)$ に対して，U 上のベクトル束 E の局所標構場 $S_U = {}^t(s_1, \ldots, s_q)$ によって

$$s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda^\alpha s_\alpha|_p, \qquad \lambda^\alpha \in \mathbb{R}$$

とかける．このとき，

$$R(X,Y)s = \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \lambda^\alpha \left\langle X \wedge Y\, ,\, \Omega_\alpha^\beta \right\rangle s_\beta|_p \tag{1.30}$$

とおくと，曲率行列 $\Omega = (\Omega_\alpha^\beta)$ は，局所標構場の変換に対して (1.29) によって変換するので，$\left\langle X \wedge Y\, ,\, \Omega_\alpha^\beta \right\rangle$ は線形空間 $\pi^{-1}(p)$ の $(1,1)$ 型のテンソルであり，(1.30) により定義した $R(X,Y)$ は，局所座標のとり方によらない $\pi^{-1}(p)$ から自分自身への線形写像となる．

滑らかな多様体 M 上の滑らかな接ベクトル場 X, Y に対して，$R(X,Y)$ は $\Gamma(E)$ 上の線形作用素である，すなわち，任意 $s \in \Gamma(E)$, $p \in M$ に対して，

$$(R(X,Y)s)(p) = R(X_p, Y_p)s_p \tag{1.31}$$

が成り立つ．明らかに，$R(X,Y)$ は次の条件をみたす．

1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,
2) $R(fX,Y) = f \cdot R(X,Y)$,
3) $R(X,Y)(fs) = f \cdot (R(X,Y)s)$.

ここで，$X, Y \in \Gamma(T(M))$, $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$ である．このとき，写像 $R(X,Y)$ を接続 D の**曲率作用素**とよぶ．

定理 1.3 多様体 M の任意の滑らかな接ベクトル場 X, Y に対して，

$$R(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X\,,\,Y]} \tag{1.32}$$

が成り立つ．

証明　絶対微分と曲率作用素は局所的な作用素なので，(1.32) の両辺の作用を，局所切断上で考えればよい．ここで

$$s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda^\alpha s_\alpha$$

と局所的にかける $s \in \Gamma(E)$ に対して

$$D_X s = \sum_{\alpha=1}^{q} \left(X\lambda^\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda^\beta \left\langle X\,,\,\omega_\beta^\alpha \right\rangle \right) s_\alpha \tag{1.33}$$

と

$$\begin{aligned} D_Y D_X s = \sum_{\alpha=1}^{q} \Bigg\{ & Y(X\lambda^\alpha) + \sum_{\beta=1}^{q} \left(X\lambda^\beta \left\langle Y\,,\,\omega_\beta^\alpha \right\rangle + Y\lambda^\beta \left\langle X\,,\,\omega_\beta^\alpha \right\rangle \right) \\ & + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda^\beta \left(Y \left\langle X\,,\,\omega_\beta^\alpha \right\rangle + \sum_{\gamma=1}^{q} \langle X\,,\,\omega_\beta^\gamma \rangle \left\langle Y\,,\,\omega_\gamma^\alpha \right\rangle \right) \Bigg\} s_\alpha \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} D_X D_Y s - D_Y D_X s &= \sum_{\alpha=1}^{q} \Bigg\{ [X\,,\,Y]\lambda^\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda^\beta \Bigg(\langle [X\,,\,Y],\,\omega_\beta^\alpha \rangle \\ &\qquad + \left\langle X \wedge Y\,,\,d\omega_\beta^\alpha - \sum_{\gamma=1}^{q} \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \right\rangle \Bigg) \Bigg\} s_\alpha \\ &= D_{[X\,,\,Y]} s + \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{q} \lambda^\beta \langle X \wedge Y\,,\,\Omega_\beta^\alpha \rangle s_\alpha \end{aligned} \tag{1.34}$$

が得られる．すなわち，

$$R(X,Y)s = D_X D_Y s - D_Y D_X s - D_{[X\,,\,Y]} s$$

となる．　□

定理 1.4　曲率行列 Ω は，**ビアンキの恒等式**

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega \tag{1.35}$$

をみたす．

証明　$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ の両辺を外微分すれば，

$$\begin{aligned} d\Omega &= -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega \\ &= -(\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\ &= -\Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega \end{aligned}$$

となる．　□

ベクトル束 E の切断 s が，条件

$$Ds = 0 \tag{1.36}$$

をみたすとき，s を**平行切断**という．零切断は明らかに平行切断である．ただし一般的に平行切断は存在しないこともありうる．局所標構場 S を用いて $s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda^\alpha s_\alpha$ とかくと，(1.36) は

$$d\lambda^\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha = 0, \qquad 1 \leq \alpha \leq q \tag{1.37}$$

と同値である．これはパッフ連立方程式であり，

$$\theta^\alpha = d\lambda^\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha \tag{1.38}$$

とおくと，

$$d\theta^\alpha = \sum_{\beta=1}^{q} \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \sum_{\beta=1}^{q} \lambda^\beta \Omega_\beta^\alpha \tag{1.39}$$

が得られる．したがって，接続 D の曲率行列が 0 のとき，

$$d\theta^\alpha \equiv 0 \quad \mod (\theta^1, \ldots, \theta^q)$$

となる，すなわち，連立方程式 (1.37) は完全積分可能である．このとき，q 個の 1 次独立な平行切断が存在する．同様に，(1.37) が 0 でない解をもつためにはいくつかの条件を付ける必要がある．

定義 1.3 C は M 上のパラメーター付けられた曲線，X は C に沿った接ベクトル場としよう．このとき，C 上のベクトル束 E の切断 s が

$$D_X s = 0 \tag{1.40}$$

をみたすとき，s は曲線 C に沿って**平行**であるという．

曲線 C を M 上の座標近傍 U で

$$u^i = u^i(t), \qquad 1 \leq i \leq m \tag{1.41}$$

と表すと，接ベクトル場 C は

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

となる．U の局所標構場 S に対して，$s = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda^\alpha s_\alpha$ が C に沿って平行切断であるための必要十分条件は，連立方程式

$$\langle X\,,\, Ds\rangle = \sum_{\alpha=1}^{q}\left(\frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \sum_{\beta,i}\Gamma^\alpha_{\beta i}\frac{du^i}{dt}\lambda^\beta\right)s_\alpha = 0,$$

すなわち，

$$\frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \sum_{\beta,i}\Gamma^\alpha_{\beta i}\frac{du^i}{dt}\lambda^\beta = 0, \qquad 1 \le \alpha \le q \tag{1.42}$$

をみたすことである．

(1.42) は常微分方程式なので，任意の初期条件に対して一意の解が存在する．したがって，任意のベクトル $v \in E_p$ が C の点 p に与えられているとき，C に沿って平行なベクトル場を一意的に定める．それを C に沿った v の**平行移動**という．明らかに，C に沿った平行移動は，C の異なる点におけるベクトル束 E のファイバー間に同形写像を誘導する．

なお，ベクトル束 E の接続 D は，双対束 E^* 上の接続 (これも D とかくことにする) を誘導する．$s \in \Gamma(E)$, $s^* \in \Gamma(E^*)$ をとり，$\langle s\,,\, s^*\rangle$ は M 上の滑らかな関数とするとき，E^* の誘導された接続は，方程式

$$d\,\langle s\,,\, s^*\rangle = \langle Ds\,,\, s^*\rangle + \langle s\,,\, Ds^*\rangle \tag{1.43}$$

によって決まる．ここで右辺の $\langle\ ,\ \rangle$ は E と E^* の間の内積である．

E^* の誘導接続の行列を計算しよう．$s_\alpha\,(1 \le \alpha \le q)$ は E 上の局所標構場とし，E^* 上の双対局所標構場を $s^{*\beta}\,(1 \le \beta \le q)$，すなわち，

$$\left\langle s_\alpha\,,\, s^{*\beta}\right\rangle = \delta^\beta_\alpha \tag{1.44}$$

としよう．さらに，

$$Ds^{*\beta} = \sum_{\gamma=1}^{q}\omega^{*\beta}_\gamma \otimes s^{*\gamma} \tag{1.45}$$

とおくと，(1.43) より

$$\omega^\beta_\alpha = \left\langle Ds_\alpha\,,\, s^{*\beta}\right\rangle = -\left\langle s_\alpha\,,\, Ds^{*\beta}\right\rangle = -\omega^{*\beta}_\alpha$$

となるので，

$$Ds^{*\beta} = -\sum_{\alpha=1}^{q}\omega^\beta_\alpha \otimes s^{*\alpha} \tag{1.46}$$

が得られる．

E^* の切断 s^* を局所的に

$$s^* = \sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha s^{*\alpha}$$

と表すと，(1.46) より

$$Ds^* = \sum_{\alpha=1}^{q} \left(dx_\alpha - \sum_{\beta=1}^{q} x_\beta \omega_\alpha^\beta \right) \otimes s^{*\alpha} \tag{1.47}$$

が成り立つ．

ベクトル束 E_1 と E_2 に，それぞれ異なる接続 D (両方の接続を同じ記号で表す) が与えられたとき，$s_1 \in \Gamma(E_1)$, $s_2 \in \Gamma(E_2)$ に対して $s_1 \oplus s_2$, $s_1 \otimes s_2$ は $E_1 \oplus E_2$ と $E_1 \otimes E_2$ のそれぞれの切断である．すなわち，

$$D(s_1 \oplus s_2) = Ds_1 \oplus Ss_2, \tag{1.48}$$

$$D(s_1 \otimes s_2) = Ds_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes Ds_2 \tag{1.49}$$

とおくと，これらの式より，それぞれ $E_1 \oplus E_2$, $E_1 \otimes E_2$ の**誘導接続**とよばれる $E_1 \oplus E_2$, $E_1 \otimes E_2$ 上の接続が決まる．

§4-2　アファイン接続

接束 $T(M)$ は本質的には，滑らかな m 次元多様体 M の可微分構造によって決まる m 次元ベクトル束である．$T(M)$ 上の接続を**アファイン接続**という．§4-1 に述べたベクトル束の接続の一般論より，M 上にアファイン接続は必ず存在する．アファイン接続が与えられた多様体を**アファイン接続空間**という．

M をアファイン接続 D が与えられた m 次元アファイン接続空間とする．本節では，1 から m までの範囲に対してアインシュタインの縮約記号を使用する．

このとき，M 上の任意の座標系 $(U; u^i)$ に対して，自然基底 $\{s_i = \partial/\partial u^i,\ 1 \leq i \leq m\}$ は，U における接束 $T(M)$ 上の局所標構場となる．したがって

$$Ds_i = \omega_i^j \otimes s_j = \Gamma_{ik}^j du^k \otimes s_j \tag{2.1}$$

とおく．ここで，Γ_{ik}^j は U 上の滑らかな関数で，局所座標 u^i に関する接続 D の**係数**という．

次に，局所座標変換に対する接続 D の係数の変換式を求めよう．$(W; w^i)$ を

M 上の別な座標系とし，$s'_i = \partial/\partial w^i$ とおく．$U \cap W \neq \varnothing$ 上で

$$S' = J_{WU} \cdot S \tag{2.2}$$

が成り立つ．ここで，

$$J_{WU} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial w^1} & \cdots & \dfrac{\partial u^m}{\partial w^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial w^m} & \cdots & \dfrac{\partial u^m}{\partial w^m} \end{pmatrix}$$

は局所座標変換のヤコビ行列であり，$S = {}^t(s_1, \ldots, s_m)$ とした．

(1.12) より

$$\omega' = dJ_{WU} \cdot J_{WU}^{-1} + J_{WU} \cdot \omega \cdot J_{WU}^{-1} \tag{2.3}$$

となる．つまり

$$\omega'^j_i = d\left(\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\right)\frac{\partial w^j}{\partial u^p} + \frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}\omega^q_p \tag{2.4}$$

が成り立つ．ここで $\omega'^j_i = \Gamma'^j_{ik} dw^k$ である．したがって，座標変換における接続係数 Γ^j_{ik} の変換式は

$$\Gamma'^j_{ik} = \Gamma^q_{pr}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial u^r}{\partial w^k} + \frac{\partial^2 u^p}{\partial w^i \partial w^k} \cdot \frac{\partial w^j}{\partial u^p} \tag{2.5}$$

である．

上記の式より，Γ^j_{ik} は M 上のテンソル場ではないことがわかる．すなわち，接続係数が M のある点で 0 となることは不変の性質ではない．要するに，M 上のある点において接続係数が 0 となる局所座標系が存在するとしてよい (下記の定理 2.1 を参照)．このことは，接続係数が含まれている計算のときおおいに役立つ性質である．

M のアファイン接続を考える主目的は，テンソル場を微分することができるということである．テンソル場の絶対微分を次のように定義しよう．局所座標を用いて

$$X = x^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2.6}$$

とかける M 上の滑らかなベクトル場 X に対して，接続の定義より

$$DX = (dx^i + x^j \omega^i_j) \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$= x^i{}_{,j} du^j \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2.7}$$

が成り立つ．ここで，

$$x^i{}_{,j} = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} + x^k \Gamma^i_{kj} \tag{2.8}$$

とおく．よって，DX はベクトル束 $T^*(M) \otimes T(M)$ の切断となる．すなわち，M 上の (1,1) 型テンソル場である．この DX を X の**絶対微分**とよぶ．(2.8) は，古典的なテンソル解析学における u^j に関する反変テンソルの絶対微分である．

ここで，余接束は接束の双対束であり，テンソル束 T^r_s は接束と余接束の積

$$T^r_s(M) = \underbrace{T(M) \otimes \cdots \otimes T(M)}_{r\ \text{個}} \otimes \underbrace{T^*(M) \otimes \cdots \otimes T^*(M)}_{s\ \text{個}} \tag{2.9}$$

であることを改めて確認する．(1.43), (1.49) より，M 上のアファイン接続 D は，余接束 $T^*(M)$ とテンソル束 T^r_s のそれぞれに接続を誘導する．

局所座標 u^i における余接束の局所余標構場は，

$$s^{*i} = du^i, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.10}$$

であり，それは $\{s_i = \partial/\partial u^i, 1 \leq i \leq m\}$ の双対標構である．さらに (1.46) より

$$\begin{aligned} Ds^{*i} &= -\omega^i_j \otimes s^{*j} \\ &= -\Gamma^i_{jk} du^k \otimes du^j \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．M 上の余接ベクトル場 α を局所座標を用いて $\alpha = \alpha_i\, du^i$ と表すと，

$$\begin{aligned} D\alpha &= (d\alpha_i - \alpha_j \omega^j_i) \otimes du^i \\ &= \alpha_{i,j} du^j \otimes du^i \end{aligned} \tag{2.12}$$

が成り立つ．ここで，

$$\alpha_{i,j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} - \alpha_k \Gamma^k_{ij} \tag{2.13}$$

である．よって，$D\alpha$ は (0,2) 型テンソル場であり，余接ベクトル場 α の**絶対微分**とよばれる．

一般に，t を (r, s) 型テンソル場とすると，Dt は $(r, s+1)$ 型テンソル場となる．この Dt を t の**絶対微分**という．例として，$r = 2$, $s = 1$ の場合を考えよう．

局所座標 u^i を用いて

$$t = t^{ij}_k du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{2.14}$$

とかくと，(2,1) 型のテンソル場に対して，(1.49) より

$$\begin{aligned} Dt &= dt^{ij}_k \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} + t^{ij}_k D(du^k) \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} \\ &\quad + t^{ij}_k du^k \otimes D\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} + t^{ij}_k du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes D\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \left(dt^{ij}_k - t^{ij}_l \omega^l_k + t^{lj}_k \omega^i_l + t^{il}_k \omega^j_l\right) \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} \\ &= t^{ij}_{k,h} du^h \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} \end{aligned} \tag{2.15}$$

となる．ここで，

$$t^{ij}_{k,h} = \frac{\partial t^{ij}_k}{\partial u^h} - t^{ij}_l \Gamma^l_{kh} + t^{lj}_k \Gamma^i_{lh} + t^{il}_k \Gamma^j_{lh} \tag{2.16}$$

である．

スカラー場の絶対微分は，それの通常の微分として定義する．

定義 2.1　$C : u^i = u^i(t)$ を M 上のパラメーター付けられた曲線とし，$X(t)$ は

$$X(t) = x^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{C(t)} \tag{2.17}$$

とかける C 上の接ベクトル場としよう．このとき，X の絶対微分が 0 となる場合，つまり

$$\frac{DX}{dt} = 0 \tag{2.18}$$

となるとき，$X(t)$ は C に沿って**平行**であるという．曲線 C 上の接ベクトルが C に沿って平行であれば，C を**自己平行曲線**あるいは**測地線**とよぶ．

式 (2.18) は

$$\frac{dx^i}{dt} + x^j \Gamma^i_{jk} \frac{du^k}{dt} = 0 \tag{2.19}$$

と同値であり，連立 1 階常微分方程式となる．したがって，C の点における接ベクトル X は，X の曲線 C に沿って**平行移動**とよばれる平行接ベクトル場を誘導する．§4-1 に述べた一般論によって，C に沿っての平行移動は，C の 2 つ

の任意の点における接空間の間の同形写像を誘導する．

曲線 C が測地線ならば，その接ベクトル

$$X(t) = \frac{du^i(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{C(t)}$$

は C に沿って平行であるので，測地線 C は

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = 0 \tag{2.20}$$

をみたす．この式は連立 2 階常微分方程式である．したがって，点 p における接ベクトルに接する点 p を通るただ一つの測地線が存在する．

次に，アファイン接続の曲率行列 Ω を調べよう．

$$\omega^j_i = \Gamma^j_{ik}du^k \tag{2.21}$$

なので

$$\begin{aligned} d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h &= \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial u^l}du^l \wedge du^k - \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}du^l \wedge du^k \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial u^l} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}\right)du^k \wedge du^l \end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\Omega^j_i = \frac{1}{2}R^j_{ikl}du^k \wedge du^l \tag{2.22}$$

となる．ここで，

$$R^j_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial u^l} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}. \tag{2.23}$$

$(W; w^i)$ を M 上の別な座標系とすれば，W における局所標構場

$$S' = {}^t\left(\frac{\partial}{\partial w^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w^m}\right)$$

と S との $U \cap W$ 上での関係式は (2.2) である．(1.29) より

$$\Omega' = J_{WU} \cdot \Omega \cdot J_{WU}^{-1} \tag{2.24}$$

が成り立つ．ここで，Ω' は座標系 $(W; w^i)$ における接続 D の曲率行列である．上記の式を成分でかくと

$$\Omega'^j_i = \Omega^q_p \frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}$$

となる．よって

$$R'^{j}_{ikl} = R^{q}_{prs} \frac{\partial w^j}{\partial u^q} \frac{\partial u^p}{\partial w^i} \frac{\partial u^r}{\partial w^k} \frac{\partial u^s}{\partial w^l} \tag{2.25}$$

である．ここで R'^{j}_{ikl} は

$$\Omega'^{j}_{i} = \frac{1}{2} R'^{j}_{ikl} dw^k \wedge dw^l$$

によって決まる量である．(2.25) を第 2 章の (2.9) と比較すれば，R^{j}_{ikl} は $(1,3)$ 型テンソルの変換式をみたすので，

$$R = R^{j}_{ikl} \frac{\partial}{\partial u^j} \otimes du^i \otimes du^k \otimes du^l \tag{2.26}$$

は局所座標のとり方によらないものであり，アファイン接続 D の**曲率テンソル**とよばれる．

M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 X, Y に対して，M の接ベクトル場を別の接ベクトルに写す曲率作用素 $R(X,Y)$ がある ((1.30) を参照)．定理 1.3 より，$R(X,Y)$ は

$$R(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X\,,\,Y]} \tag{2.27}$$

とかける．ここで，$R(X,Y)$ を曲率テンソルを用いて表そう．局所座標を用いて

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Z = Z^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2.28}$$

とかける接ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= Z^i \left\langle X \wedge Y\,,\, \Omega^{j}_{i} \right\rangle \frac{\partial}{\partial u^j} \\ &= R^{j}_{ikl} Z^i X^k Y^l \frac{\partial}{\partial u^j} \end{aligned} \tag{2.29}$$

となる，よって，

$$R^{j}_{ikl} = \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) \frac{\partial}{\partial u^i}\,,\, du^j \right\rangle \tag{2.30}$$

が成り立つ．接続係数 Γ^{j}_{ik} はテンソルの変換式をみたさないが，

$$T^{j}_{ik} = \Gamma^{j}_{ki} - \Gamma^{j}_{ik} \tag{2.31}$$

とおけば，(2.5) より

$$T'^{j}_{ik} = T^{q}_{pr} \frac{\partial w^j}{\partial u^q} \frac{\partial u^p}{\partial w^i} \frac{\partial u^r}{\partial w^k} \tag{2.32}$$

となる．よって，T^i_{jk} は $(1,2)$ 型テンソルの変換則をみたしている．したがって，

$$T = T^j_{ik} \frac{\partial}{\partial u^j} \otimes du^i \otimes du^k \tag{2.33}$$

は，アファイン接続 D の**捩率テンソル**とよばれる $(1,2)$ 型のテンソルである．(2.31) より，捩率テンソル T の成分は下付の添字に対して歪対称である．すなわち，

$$T^j_{ik} = -T^j_{ki} \tag{2.34}$$

が成り立つ．T は $(1,2)$ 型テンソルなので，$\Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M))$ から $\Gamma(T(M))$ への写像とみることができる．すなわち，M 上の任意の接ベクトル場 X, Y に対して，$T(X,Y)$ は局所的に

$$T(X,Y) = T^k_{ij} X^i Y^j \frac{\partial}{\partial u^k} \tag{2.35}$$

となる M の接ベクトル場である．

$$T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X\ ,\ Y] \tag{2.36}$$

の証明は読者にまかせる．

定義 2.2 アファイン接続 D の捩率テンソルが 0 ならば，その接続は**捩率のない接続**とよばれる．

捩率のないアファイン接続はつねに存在する．すなわち，接続 D の係数を Γ^j_{ik} とし，

$$\widetilde{\Gamma}^j_{ik} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right) \tag{2.37}$$

とおくと，$\widetilde{\Gamma}^j_{ik}$ は下付添字に関して対称であり，局所座標変換に関して (2.5) をみたす．したがって，$\widetilde{\Gamma}^j_{ik}$ はある捩率のない接続 $\widetilde{D}$ の係数となる．

任意の接続は，その捩率テンソルとある捩率のない接続に分解できる．実際，(2.31) と (2.37) より

$$\Gamma^j_{ik} = -\frac{1}{2} T^j_{ik} + \widetilde{\Gamma}^j_{ik} \tag{2.38}$$

となる．すなわち

$$D_X Z = \frac{1}{2} T(X,Z) + \widetilde{D}_X Z \tag{2.39}$$

が成り立つ．

測地線の方程式 (2.20) は

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \widetilde{\Gamma}^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = 0 \tag{2.40}$$

と同値である．よって接続 D とこれに対応する捩率のない接続 $\widetilde{D}$ は同じ測地線をもつ．

捩率のないアファイン接続の性質については，以下の二つの定理で述べられる．

定理 2.1　M 上の捩率のない接続 D に対して，任意の点 $p \in M$ における接続係数 Γ^j_{ik} が p で 0 となるような局所座標系 u^i が存在する．

証明　点 p における接続係数が Γ'^j_{ik} となる p の局所座標系を $(W; w^i)$ をとろう．このとき，

$$u^i = w^i + \frac{1}{2}\Gamma'^i_{jk}(p)\Big(w^j - w^j(p)\Big)\Big(w^k - w^k(p)\Big) \tag{2.41}$$

とおくと，

$$\left.\frac{\partial u^i}{\partial w^j}\right|_p = \delta^i_j, \qquad \left.\frac{\partial^2 u^i}{\partial w^j \partial w^k}\right|_p = \Gamma'^i_{jk}(p) \tag{2.42}$$

が得られる．したがって行列 $\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial w^j}\right)$ は p の近傍で非退化であり，座標変換による変換式は (2.41) である．(2.5) より接続係数 Γ^j_{ik} は新たな座標系 u^i で

$$\Gamma^j_{ik}(p) = 0, \qquad 1 \le i, j, k \le m$$

をみたす．　□

定理 2.2　M の捩率のない接続 D に対して，ビアンキの恒等式

$$R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l} = 0 \tag{2.43}$$

が成り立つ．

証明　定理 1.4 より

$$d\Omega^j_i = \omega^k_i \wedge \Omega^j_k - \Omega^k_i \wedge \omega^j_k$$

となる．すなわち，

$$\frac{\partial R^j_{ikl}}{\partial u^h} du^h \wedge du^k \wedge du^l = \left(\Gamma^p_{ih}R^j_{pkl} - \Gamma^j_{ph}R^p_{ikl}\right) du^h \wedge du^k \wedge du^l$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} R^j_{ikl,h} du^h \wedge du^k \wedge du^l &= -\left(\Gamma^p_{kh}R^j_{ipl} - \Gamma^p_{lh}R^j_{ikp}\right) du^h \wedge du^k \wedge du^l \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．上記の最後の等式では，接続は捩率がないことを利用した．したがって，

$$\left(R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l}\right) du^h \wedge du^k \wedge du^l = 0 \tag{2.44}$$

となる．(2.44) における添数は k, l, h に対して歪対称なので，

$$R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l} = 0$$

が成り立つ． □

(2.27) より，任意の接ベクトル場の 2 階絶対微分の計算のとき，曲率テンソルは微分の順序の交換の結果として表れてくるものであることがわかる．テンソル場に関しても同様な結果が成り立つ．すなわち，M のスカラー場 f に対して

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}, \qquad f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma^k_{ij} f_{,k}$$

とおくと，

$$f_{,ij} - f_{,ji} = T^k_{ij} f_{,k} \tag{2.45}$$

が成り立つ．さらに，局所的に

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

と表す M の接ベクトル場 X に対して

$$X^i{}_{,p} = \frac{\partial X^i}{\partial u^p} + X^j \Gamma^i_{jp},$$
$$X^i{}_{,pq} = \frac{\partial X^i{}_{,p}}{\partial u^q} + X^j{}_{,p} \Gamma^i_{jq} - X^i{}_{,l} \Gamma^l_{pq}$$

となる．したがって，

$$X^i{}_{,pq} - X^i{}_{,qp} = -X^j R^i_{jpq} + X^i{}_{,l} T^l_{pq} \tag{2.46}$$

が成り立つ．同様に，(2, 1) 型テンソル t に対して，

$$t^{ij}_k{}_{,pq} - t^{ij}_k{}_{,qp} = -t^{lj}_k R^i_{lpq} - t^{il}_k R^j_{lpq} + t^{ij}_l R^l_{kpq} + t^{ij}_k{}_{,l} T^l_{pq} \tag{2.47}$$

となる．

上記の議論より，絶対微分の交換式は，その曲率テンソルと捩率テンソルにより決まることがわかる．

§4-3　標構束上の接続

可微分多様体上の接続と標構束との間には密接な関係がある．M を m 次元可微分多様体としよう．このとき，M の点 p と点 p における 1 次独立な接ベクトル $e_1, \ldots, e_m$ に対して，その組 $(p; e_1, \ldots, e_m)$ は**標構**である．M 上のすべての標構を P で表そう．P は滑らかな多様体，自然射影

$$\pi(p; e_1, \ldots, e_m) = p \tag{3.1}$$

は P から M への滑らかな写像となるような微分構造を P に導入しよう．このとき，(P, M, π) は M 上の**標構束**とよばれる．

P に微分構造を導入する方法はテンソル束の場合と同様である．M 上の任意の座標変換 $(U; u^i)$ に対して，U 上に自然標構場 $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right)$ が存在し，U 上の任意の標構は

$$e_i = X_i^k \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3.2}$$

とかける．ここで，(X_i^k) は $m \times m$ 非退化行列，つまり $GL(m; \mathbb{R})$ の元である．したがって，任意の $p \in U$ と $(X_i^k) \in GL(m; \mathbb{R})$ に対して

$$\varphi_U(p, X_i^k) = (p; e_1, \ldots, e_m) \tag{3.3}$$

が成り立つ写像 $\varphi_U : U \times GL(m; \mathbb{R}) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ が定義できる．ここで，e_i は (3.2) で与えられ，φ_U は 1 対 1 写像である．

M の座標被覆 $\{U, W, Z, \ldots\}$ をとり，その式 (3.3) より対応写像を φ_U，φ_W，φ_Z，$\ldots$ としよう．このとき，位相積 $U \times GL(m; \mathbb{R})$ において，φ_U による開集合の像は P の位相基となる．P のこの位相構造に従って，写像

$$\varphi_U : U \times GL(m; \mathbb{R}) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

は同相写像である．

写像 φ_U を通じて $\pi^{-1}(U)$ は，局所座標系 (u^i, X_i^k) をもつ P の座標近傍となり，$U \cap W \neq \varnothing$ ならば，$U \cap W$ 上の M の局所座標変換は

$$w^i = w^i(u^1, \ldots, u^m), \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3.4}$$

である．したがって，対応する自然基底との関係は

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial w^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial w^j} \tag{3.5}$$

となる．$(p; e_1, \ldots, e_m)$ を $U \cap W$ 上の標構とすれば，異なる座標系 (u^i, X_i^k) と (w^i, Y_i^k) に対して，

$$\varphi_U(u^i, X_i^k) = \varphi_W(w^i, Y_i^k) \tag{3.6}$$

が成立する．つまり，w^i と u^i は (3.4) をみたし，

$$X_i^k \frac{\partial}{\partial u^k} = Y_i^k \frac{\partial}{\partial w^k},$$

または，

$$Y_i^k = X_i^j \frac{\partial w^k}{\partial u^j} \tag{3.7}$$

となる．

したがって，(3.4) と (3.7) は多様体 P 上の座標変換式である．明らかに，w^i と Y_i^k はそれぞれ u^i と X_i^k の滑らかな関数となるので，座標近傍 $\pi^{-1}(U)$ と $\pi^{-1}(W)$ は C^∞ 両立である．したがって，P は $(m+m^2)$ 次元の滑らかな多様体となり，自然射影 $\pi : P \longrightarrow M$ は滑らかな全射である．

式 (3.3) より，写像 φ_U は，多様体 P 上の局所積構造を提供する．つまり $\pi^{-1}(U)$ は，直積 $U \times GL(m;\mathbb{R})$ と微分同形となる．要するに，任意の $p \in U$ に対して，

$$\varphi_{U,p}(X) = \varphi_U(p, X), \qquad X \in GL(m;\mathbb{R}) \tag{3.8}$$

とおくと，$\varphi_{U,p} : GL(m;\mathbb{R}) \longrightarrow \pi^{-1}(p)$ は同相写像である．

ここで，$U \cap W \neq \varnothing$，$p \in U \cap W$ に対して，写像 $\varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p}$ は $GL(m;\mathbb{R})$ からそれ自身への同相写像である．一方 (3.7) より，$\varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p}$ はヤコビ行列 $J_{UW} = (\partial w^k / \partial u^j)$ の $GL(m;\mathbb{R})$ 上の右移動である．したがって，$\{J_{UW}\}$ は標構束上の推移関数族である．標構束 P は M の接束 $T(M)$ の**同伴主ファイバー束**となり，そのファイバーや構造群はそれぞれ同じ $GL(m;\mathbb{R})$ である (Steenrod 1951 を参照)．標構束はファイバー束であり，ベクトル束ではない．

構造群 $GL(m;\mathbb{R})$ は，自然に標構束 P に作用し，P 上の同相写像の群となる．$a = (a_i^j) \in GL(m;\mathbb{R})$ に対して，$\det a \neq 0$ であるので，a の P への作用 L_a を

$$L_a(p; e_1, \ldots, e_m) = (p; e'_1, \ldots, e'_m) \tag{3.9}$$

と定義する．ここで，

$$e'_i = a_i^j e_j \tag{3.10}$$

である．

このとき，各 L_a は P から P へのファイバー保存の同相写像となる．すなわち，

$$\pi \circ L_a = \pi : P \longrightarrow M \tag{3.11}$$

が成り立つ．L_a は P への $a \in GL(m;\mathbb{R})$ の**左移動**とよばれ，$a, b \in GL(m;\mathbb{R})$ に対して，明らかに，

$$L_{ab} = L_a \circ L_b \tag{3.12}$$

となる．$(U; u^i)$, $(W; w^i)$ を M 上の座標系とし，それに対応する P 上の座標近傍 (u^i, X_i^k), (w^i, Y_i^k) に対して，(X_i^k) と (Y_i^k) の逆行列をそれぞれ (X_i^{*k}) と (Y_i^{*k}) と表す．つまり，

$$X_i^k X_k^{*j} = X_i^{*k} X_k^j = \delta_i^j,$$

$$Y_i^k Y_k^{*j} = Y_i^{*k} Y_k^j = \delta_i^j$$

である．$U \cap W \neq \varnothing$ ならば，$U \cap W$ 上で

$$dw^i = \frac{\partial w^i}{\partial u^j} du^j \tag{3.13}$$

となる．一方，(3.7) より

$$X_i^{*j} = \frac{\partial w^k}{\partial u^i} Y_k^{*j} \tag{3.14}$$

となる．よって，

$$X_i^{*j} du^i = Y_i^{*j} dw^i \tag{3.15}$$

が成り立つ．したがって，1 次微分形式

$$\theta^i = X_j^{*i} du^j \tag{3.16}$$

は P 上の局所座標のとり方に依存しないこととなり，θ^i は P 上の 1 次微分形式である．

なお，パッフ連立方程式

$$\theta^i = 0, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3.17}$$

により，P の m^2 次元接部分空間 V，すなわち**垂直空間**とよばれる各点における m^2 次元接部分空間が決まる．(3.16) より

$$du^i = X_j^i \theta^j$$

が得られるので，連立方程式 (3.17) は各座標近傍で

$$du^i = 0, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3.18}$$

が成り立ち，パッフ連立方程式 (3.17) は完全積分可能である．ここで (3.17) の極大積分多様体は

$$u^i = \text{定数}, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3.19}$$

となる．すなわち，P の $p \in M$ におけるファイバー $\pi^{-1}(p)$ である．したがって，垂直空間は各ファイバーの接空間となる．

ところで，M を接続 D をもつ m 次元アファイン接続空間とし，その局所座標系 $(U; u^i)$ における D の接続行列を $\omega = (\omega_i^j)$ としよう．このとき，ベクトル場 $e_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial u^k}$ の絶対微分は

$$De_i = (dX_i^k + X_i^j \omega_j^k) \otimes \frac{\partial}{\partial u^k}$$

となり，X_i^k を独立変数とみると，

$$DX_i^k \equiv dX_i^k + X_i^j \omega_j^k \tag{3.20}$$

は P の座標近傍 $\pi^{-1}(U)$ における 1 次微分形式となる．

ここで，接続 D より決まる多様体 P 全体に定義できるような 1 次微分形式を求めよう．$(W; w^i)$ を M 上の別な局所座標系としよう．このとき，$U \cap W \neq \varnothing$ ならば，$U \cap W$ 上で，

$$Y_i^k = X_i^j \frac{\partial w^k}{\partial u^j}$$

となり，(2.4) より

$$\begin{aligned} dY_i^k + Y_i^j \omega'^k_j &= dX_i^j \frac{\partial w^k}{\partial u^j} + X_i^j d\left(\frac{\partial w^k}{\partial u^j}\right) \\ &\quad + Y_i^j \left(d\left(\frac{\partial u^h}{\partial w^j}\right) \frac{\partial w^k}{\partial u^h} + \frac{\partial u^h}{\partial w^j} \omega_h^p \frac{\partial w^k}{\partial u^p} \right) \\ &= \left(dX_i^j + X_i^l \omega_l^j \right) \frac{\partial w^k}{\partial u^j} \end{aligned} \tag{3.21}$$

が成立し，すなわち

$$DY_i^k = DX_i^j \frac{\partial w^k}{\partial u^j} \tag{3.22}$$

となる．(3.14) より

$$Y_k^{*j} DY_i^k = X_k^{*j} DX_i^k \tag{3.23}$$

となる．したがって 1 次微分形式

$$\theta_i^j = X_k^{*j} D X_i^k$$
$$= X_k^{*j}\left(dX_i^k + X_i^l \omega_l^k\right) \tag{3.24}$$

は局所座標系のとり方によらないので，P 上の 1 次微分形式であることがわかる．

(u^i, X_i^k) は P 上の局所座標系なので，(du^i, dX_i^k) は P の一点における接空間上の座標となる．よって，$(u^i, X_i^k; du^i, dX_i^k)$ は P の接束上の局所座標系である．さらに，θ^i と θ_i^k とで P 上の $m+m^2$ 個の 1 次微分形式なので，これらは，任意の座標近傍 $\pi^{-1}(U)$ において du^i, dX_i^k の 1 次結合でかける．ここで，逆も成り立つ．したがって，θ^i と θ_i^k はいたるところ 1 次独立となる．すなわち，$\{\theta^i, \theta_i^k\}$ は，その双対が P 上の大域的な標構場となるような P 全体上の余標構である．

一般的に，M 上に大域的な標構場は存在しないかもしれない．M 上にはつねにアファイン接続が存在するので，標構束 P 上にはつねに大域的な標構場が存在する．この観点からみると，P は M より単純である．

局所座標系 $(U; u^i)$ における式 (3.16), (3.24) より

$$du^i = X_j^i \theta^j, \tag{3.25}$$

$$dX_i^j = -X_i^k \omega_k^j + X_k^j \theta_i^k \tag{3.26}$$

が成り立つ．(3.25) の外微分をとれば，

$$0 = dX_j^i \wedge \theta^j + X_j^i d\theta^j$$

$$= X_j^i\left(d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j\right) - X_k^p X_l^q \Gamma_{pq}^i \theta^l \wedge \theta^k$$

となる．よって

$$d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j = X_r^{*j} X_k^p X_l^q \Gamma_{pq}^r \theta^l \wedge \theta^k$$

$$= \frac{1}{2} X_r^{*j} X_k^p X_l^q T_{pq}^r \theta^k \wedge \theta^l \tag{3.27}$$

が得られる．また，(3.26) の外微分をとれば，

$$0 = -dX_i^k \wedge \omega_k^j - X_i^k d\omega_k^j + dX_k^j \wedge \theta_i^k + X_k^j d\theta_i^k$$
$$= -X_i^k \Omega_k^j + X_k^j\left(d\theta_i^k - \theta_i^l \wedge \theta_l^k\right)$$

となる．よって

$$d\theta_i^j - \theta_i^l \wedge \theta_l^j = X_h^{*j} X_i^k \Omega_k^h$$
$$= \frac{1}{2} X_q^{*j} X_i^p X_k^r X_l^s R_{prs}^q \theta^k \wedge \theta^l \tag{3.28}$$

が得られる．したがって，T_{pq}^r と R_{prs}^q はそれぞれ (2.31), (2.23) で定義された捩率テンソルと曲率テンソルとなる．ここで

$$\begin{cases} P_{kl}^j = X_r^{*j} X_k^p X_l^q T_{pq}^r, \\ S_{ikl}^j = X_q^{*j} X_i^p X_k^r X_l^s R_{prs}^q \end{cases} \tag{3.29}$$

とおくと，(3.27), (3.28) は

$$\begin{cases} d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j = \frac{1}{2} P_{kl}^j \theta^k \wedge \theta^l, \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j = \frac{1}{2} S_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l \end{cases} \tag{3.30}$$

となる．明らかに，P_{kl}^j と S_{ikl}^j は局所座標のとり方によらないので，(3.30) は標構束 P 全体で成り立ち，いわゆる接続の**構造方程式**である．

自然標構 $\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$ に対して，

$$X_i^k = X_i^{*k} = \delta_i^k$$

が成り立つので，(3.30) は自然標構に限ると

$$-du^k \wedge \omega_k^j = \frac{1}{2} T_{kl}^j du^k \wedge du^l,$$
$$d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \frac{1}{2} R_{ikl}^j du^k \wedge du^l$$

となる．ここから，捩率テンソルと曲率テンソルのもともとの定義が得られる．

ここで，

$$\begin{cases} \Theta^j = \frac{1}{2} P_{kl}^j \theta^k \wedge \theta^l, \\ \Theta_i^j = \frac{1}{2} S_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l \end{cases} \tag{3.31}$$

とおくと，構造方程式は

$$\begin{cases} d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j = \Theta^j, \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j = \Theta_i^j \end{cases} \tag{3.32}$$

となり，ここで，もう一度その外微分をとれば，

$$\begin{cases} d\Theta^j + \Theta^k \wedge \theta_k^j - \theta^k \wedge \Theta_k^j = 0, \\ d\Theta_i^j + \Theta_i^k \wedge \theta_k^j - \theta_i^k \wedge \Theta_k^j = 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

が得られる．(3.33) を**ビアンキの恒等式**という．

微分形式 θ^i は M の可微分構造より決まるものである．したがって，構造方程式 (3.30) は，m^2 個の微分形式 θ_i^k が M 上のアファイン接続を定義するための十分条件を与えるという重要な役割をもつ．

定理 3.1　θ_i^j $(1 \leq i, j \leq m)$ を標構束上の m^2 個の 1 次微分形式としよう．このとき，構造方程式

$$\begin{cases} d\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i = \dfrac{1}{2} P_{kl}^i \theta^k \wedge \theta^l, \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j = \dfrac{1}{2} S_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l \end{cases} \tag{3.34}$$

がみたされていれば，θ_i^j と D との間に (3.24) が成り立つアファイン接続 D が存在する．ここで，P_{kl}^i と S_{ikl}^j は P 上の関数である．

証明　P 上の局所座標系 (u^i, X_i^k) に対して，

$$\theta^i = X_k^{*i} du^k \tag{3.35}$$

が成り立つ．ここで，(X_k^{*i}) は (X_i^k) の逆行列である．このとき，

$$\begin{aligned} d\theta^i &= dX_k^{*i} \wedge du^k \\ &= \left(dX_k^{*i} X_j^k\right) \wedge \theta^j \\ &= -X_k^{*i} dX_j^k \wedge \theta^j \end{aligned}$$

となり，これを (3.34) の第一公式に代入すると

$$\theta^j \wedge \left(\theta_j^i + \frac{1}{2} P_{jk}^i \theta^k - X_k^{*i} dX_j^k\right) = 0 \tag{3.36}$$

が得られる．θ^j は 1 次独立なので，カルタンの補題より $\theta_j^i - X_k^{*i} DX_j^k$ は θ^l の 1 次結合としてかける．よって

$$X_j^k \theta_i^j - dX_i^k = \omega_j^k X_i^j \tag{3.37}$$

を仮定できる．ここで，ω_j^k は θ^l の 1 次結合であり，したがって，du^i の 1 次結合でもある．ここで

$$\omega_j^k = \Gamma_{ji}^k du^i \tag{3.38}$$

とおくとき，Γ^k_{ji} は X^j_i によらないで u^i のみの関数であることを示せば，Γ^k_{ji} は局所座標 u^i におけるある接続の係数であるということになる．ここで，Γ^k_{ji} は P 上の関数である．

(3.37) の外微分をとれば，

$$dX^k_j \wedge \theta^j_i + X^k_j d\theta^j_i = d\omega^k_j \cdot X^j_i - \omega^k_j \wedge dX^j_i$$

となり，(3.34) を用いると，上記の式は

$$X^j_i \left(d\omega^k_j - \omega^l_j \wedge \omega^k_l \right) = \frac{1}{2} X^k_j S^j_{ilh} \theta^l \wedge \theta^h$$

とかける．右辺は du^i のみを含み，$\omega^l_j \wedge \omega^k_l$ も du^i のみを含むので，$d\omega^k_j$ は du^i のみを含む．すなわち，(3.38) より

$$d\omega^k_j = \sum_{i,l} \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial u^l} du^l \wedge du^i + \sum_{i,l,h} \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial X^h_l} dX^h_l \wedge du^i$$

となり，

$$\frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial X^h_l} = 0 \tag{3.39}$$

が得られる．

$(W; w^i)$ を M 上の別な座標近傍としよう．このとき，(w^i, Y^k_i) は $\pi^{-1}(W)$ における P の局所座標系となり，$U \cap W \neq \varnothing$ ならば，$U \cap W$ 上で

$$\begin{aligned} \theta^j_i &= X^{*j}_k dX^k_i + X^{*j}_k \omega^k_l X^l_i \\ &= Y^{*j}_k dY^k_i + Y^{*j}_k \omega'^k_l Y^l_i \end{aligned}$$

である．ここで，$\omega'^k_l = \Gamma'^k_{lj} dw^j$ で，Γ'^k_{lj} は ω^j の関数のみである．(3.7) を上記の式に代入すると

$$\omega'^j_i = d\left(\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\right) \frac{\partial w^j}{\partial u^p} + \frac{\partial u^p}{\partial w^i} \frac{\partial w^j}{\partial u^q} \omega^q_p \tag{3.40}$$

が得られる．

したがって，(ω^j_i) が局所座標系 $(U; u^i)$ における D の接続行列となるような，M 上のアファイン接続 D は (ω^j_i) より決まることがわかる． □

先ほど，P の垂直場 V はパッフ連立方程式

$$\theta^i = 0, \qquad 1 \leq i \leq m$$

により決まることを述べた．パッフ連立方程式

$$\theta^i_j = 0, \qquad 1 \leq i, j \leq m \tag{3.41}$$

より決まる各点 $x \in P$ における m 次元接部分空間 $H(x)$ は**水平空間**とよばれる．(3.41) より決まる m 次元分布 H を**水平空間の場**という．このとき，標構束 P 上のアファイン接続 D によって決まる水平空間の場 H は次の性質をみたすことは明らかである．

1) 任意の点 $x \in P$ における接空間 $T_x(P)$ は直和

$$T_x(P) = V(x) \oplus H(x) \tag{3.42}$$

に分割でき，射影 π による水平空間 $H(x)$ の像は接空間 $T_p(M)$ $(p = \pi(x))$ に同形である．

2) H は P 上の左移動の作用に対して不変である．すなわち，任意の点 $x \in P$ に対して

$$(L_a)_* H(x) = H(L_a(x)) \tag{3.43}$$

となる．

さて，$V(x)$ の次元と $H(x)$ の次元の和は $m^2 + m$ となる．すなわち $T_x(P)$ の次元となるので，(3.42) を示すのに，$V(x) \cap H(x) = 0$ を証明すればよい．垂直と水平空間の定義より

$$\theta^i(X) = 0, \quad \theta^i_j(X) = 0, \quad 1 \le i,\, j \le m$$

となり，$\{\theta^i, \theta^i_j\}$ は P 上の余標構であるので，(3.42) が成り立つ．なお，写像 $\pi : P \longrightarrow M$ は滑らかな全射なので，$\pi_* : T_x(P) \longrightarrow T_p(M)$ $(p = \pi(x))$ は上への準同形写像であり，さらに，$\pi_*(V(x)) = 0$ なので $\pi_* : H(x) \longrightarrow T_p(M)$ は同形写像となる．したがって，性質 1) が成り立つ．

性質 2) を証明するのには，標構束の局所座標を用いて左移動を表すだけでよい．M 上の局所座標系 $(U; u^i)$ に対して，座標近傍 $\pi^{-1}(U)$ における標構の局所座標は (u^i, X^i_j) ((3.3) を参照) である．標構 $(p; e'_i)$ は $(p; e_i)$ の L_a による像で，e'_i は (3.10) で与えられているとする．ここで，

$$e'_i = X'^j_i \frac{\partial}{\partial u^j}$$

とおくと，明らかに

$$X'^j_i = a^k_i X^j_k, \qquad X'^{*j}_i = X^{*k}_i (a^{-1})^j_k \tag{3.44}$$

が成り立ち，

$$X'^{*j}_k D X'^k_i = a^p_i (X^{*q}_k D X^k_p)(a^{-1})^j_q$$

となる．すなわち，

$$(L_a)^*\theta_i^j = a_i^p(a^{-1})_q^j\theta_p^q \tag{3.45}$$

が成り立つ．ここで $(X'^{*j}_{\ i})$ は $(X'^{j}_{\ i})$ の逆行列である．さらに，水平空間 H は θ_i^j $(1 \leq i,\, j \leq m)$ の零化部分空間であるので，(3.45) より水平空間場 H は左移動により不変である．

逆に，上記の 2 つの性質をみたす標構束 P の m 次元接部分空間 H が与えられると，H が標構束 P の水平空間場となるような接続 D が M 上に存在する (Kobayashi and Nomizu 1963, 1969 を参照)．したがって，標構束の観点から考えると，アファイン接続は，上記の性質をみたす m 次元接部分空間と同値であることになる．

5

リーマン幾何学

§5-1　リーマン幾何学の基礎定理

M を滑らかな m 次元多様体とし，G は M 上の 2 次の対称共変テンソル場とする．M の局所座標系 $(U; u^i)$ をとると，G は U 上で

$$G = g_{ij} du^i \otimes du^j \tag{1.1}$$

のようにかける．ここで，$g_{ij} = g_{ji}$ は U 上の滑らかな関数である．G は各点 $p \in M$ における接空間 $T_p(M)$ の双 1 次線形関数である．$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$，$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ とかくと，

$$G(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \tag{1.2}$$

と表せる．いま，$X \in T_p(M)$ に対し，任意の $Y \in T_p(M)$ とするとき，

$$G(X, Y) = 0$$

ならば $X = 0$ となるとき，G は点 $p \in M$ で**非退化**であるという．これは次の 1 次方程式

$$g_{ij}(p) X^i = 0, \qquad 1 \leq j \leq m$$

が $X = 0$ というただ一つの解をもつことと同値である．つまり，$\det(g_{ij}(p)) \neq 0$ である．次に，すべての $X \in T_p(M)$ に対して

$$G(X, X) \geq 0 \tag{1.3}$$

が成り立ち，等号が成立するのは $X = 0$ に限る，という場合，G は点 p で**正定値**であるという．

線形代数学より G が正定値であるための必要十分条件は，行列 (g_{ij}) が正定値である．したがって，G が正定値ならば行列 (g_{ij}) は非退化である．

---

* リーマン幾何学とフィンスラー幾何学の関係については第 8 章 (§8–3.2) を参照のこと．

定義 1.1　滑らかな m 次元多様体 M に，滑らかな，階数 2 のいたるところ非退化対称共変テンソル場 G が与えられたとき，M を**一般リーマン多様体**といい，G を**基本テンソル**または**計量テンソル**という．G が正定値のとき，M を**リーマン多様体**という．

一般リーマン多様体に対して，(1.2) は各点 $p \in M$ において，接空間 $T_p(M)$ の内積を定義する．任意のベクトル $X, Y \in T_p(M)$ に対して

$$X \cdot Y = G(X, Y) = g_{ij}(p) X^i Y^j \tag{1.4}$$

と表す．G が正定値の場合は，点 $p \in M$ における接ベクトルの長さと角が定義できる．すなわち，

$$|X| = \sqrt{g_{ij} X^i X^j}, \tag{1.5}$$

$$\cos \angle(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{|X| \cdot |Y|} \tag{1.6}$$

で定義する．

したがって，リーマン多様体は，各点における接空間に正定値内積が定義されている可微分多様体である．内積は滑らかである．つまり，X, Y が滑らかならば，内積 $X \cdot Y$ も M 上で滑らかであるからである．

さらに，2 次微分形式

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \tag{1.7}$$

は局所座標系 u^i のとり方によらない．この式を**計量形式**あるいは**リーマン計量**といい，ds は，ちょうど無限小接ベクトルの長さを与えている．この ds を**線素**という．ここで $C : u^i = u^i(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ を M 上の連続で区分的に滑らかなパラメーター曲線とする．このとき，曲線 C の長さは

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt \tag{1.8}$$

で与えられる．

定理 1.1　任意の滑らかな m 次元多様体にはリーマン計量が存在する．

証明　M の局所有限な座標被覆 $\{(U_\alpha; u_\alpha^i)\}$ をとる．さらに，$\{h_\alpha\}$ を $\mathrm{supp}\ h_\alpha \subset U_\alpha$ となる対応する単位の分解とする．ここで次のようにおこう．

$$ds_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{m} (du_\alpha^i)^2, \tag{1.9}$$

$$ds^2 = \sum_\alpha h_\alpha \cdot ds_\alpha^2. \tag{1.10}$$

ただし，$h_\alpha \cdot ds_\alpha^2$ は次で定義する．

$$(h_\alpha \cdot ds_\alpha^2)(p) = \begin{cases} h_\alpha(p) ds_\alpha^2, & p \in U_\alpha, \\ 0, & p \notin U_\alpha. \end{cases} \tag{1.11}$$

ここで (1.9), (1.10) は M 上の滑らかな 2 次微分形式である．(1.10) の右辺は各点 $p \in M$ において有限項の和なので，定義は意味をもっている．実際，$\overline{U}$ がコンパクトである座標近傍 $(U; u^i)$ を選ぶと，$\{U_\alpha\}$ は局所有限なので，U は $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r}$ の中の有限個のみと共通部分をもつ．したがって，(1.10) を U に制限すれば

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\alpha_\lambda} \cdot ds_{\alpha_\lambda}^2 = g_{ij} du^i du^j$$

が成り立つ．ここで，

$$g_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} h_{\alpha_\lambda} \frac{\partial u_{\alpha_\lambda}^k}{\partial u^i} \frac{\partial u_{\alpha_\lambda}^k}{\partial u^j} \tag{1.12}$$

とおいた．

一方，$0 \leq h_\alpha \leq 1$, $\sum_\alpha h_\alpha = 1$ であるので，$h_\beta(p) > 0$ であるような指標 β が存在する．したがって，

$$ds^2(p) \geq h_\beta \cdot ds_\beta^2$$

が成り立つ．したがって，ds^2 は，M 上いたるところで正定値である． □

注意. 滑らかな多様体上にリーマン計量が存在するということは，すばらしい結果である．一般に，M 上に正定値でないリーマン計量は存在しないかもしれない (このことの証明はより難しいだろう)．ファイバー束の言葉でいえば，M 上のリーマン計量の存在は，M 上の対称 2 次共変テンソルの束上に滑らかな正定値切断が存在するということである．しかしながら，任意のベクトル束について，このことが成り立つとは限らない．

ここからは，M を一般リーマン多様体とする．局所座標変換により基本テンソル G は

$$g'_{ij} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u^l}{\partial u'^j}$$

となる．行列 (g_{ij}) が非退化なので，その逆行列を (g^{ij}) で表すと，

$$g^{ik} g_{kj} = g_{jk} g^{ki} = \delta_j^i \tag{1.13}$$

が成り立つ．

よって，座標変換で g^{ij} の変換は

$$g'^{ij} = g^{kl} \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \frac{\partial u'^j}{\partial u^l} \tag{1.14}$$

で与えられることが容易にわかる．したがって，(g^{ij}) は階数 2 の対称反変テンソルである．(読者はこれを確かめよ．)

基本テンソルを用いて，接空間と余接空間は同一視できる．したがって，反変ベクトルと共変ベクトルは，同じベクトルの異なった表し方とみなすことができる．実際，$X \in T_p(M)$ に対して，

$$\alpha_X(Y) = G(X, Y), \quad Y \in T_p(M) \tag{1.15}$$

とおくと，α_X は $T_p(M)$ 上の線形汎関数である．すなわち，$\alpha_X \in T_p^*(M)$ である．逆に，G は非退化なので，任意の $T_p^*(M)$ の元は α_X の形でかける．つまり，α は $T_p(M)$ と $T_p^*(M)$ の間の同形写像となっている．ここで

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad \alpha_X = X_i du^i$$

と成分でかくと，(1.15) より，

$$X_i = g_{ij} X^j, \qquad X^j = g^{ij} X_i \tag{1.16}$$

が得られる．あるいは直接に，(X^i) が反変ベクトル場ならば，(1.16) の (X_i) は共変ベクトル場の変換法則をみたすということを示すことができる．

一般に，$(t^i{}_{jk})$ が $(1,2)$ 型のテンソルならば，

$$t_{ijk} = g_{il} t^l{}_{jk}, \qquad t^{ij}{}_k = g^{jl} t^i{}_{lk} \tag{1.17}$$

は，それぞれ $(0,3)$ 型，$(2,1)$ 型のテンソルである．(1.17) の操作は，それぞれテンソル成分の添字の**上げ**，**下げ**とよばれる．

定義 1.2 (M, G) を m 次元一般リーマン多様体とする．また D を M におけるアファイン接続とする．このとき，

$$DG = 0 \tag{1.18}$$

が成り立てば，D は M 上で G に**適合している計量接続**という．

(1.18) は，基本テンソル G が適合している計量接続に関して平行であることを意味する．与えられた局所座標 u^i で D の接続行列を $\omega = (\omega_i^j)$ とすれば，

$$DG = (dg_{ij} - \omega_i^k g_{kj} - \omega_j^k g_{ik}) \otimes du^i \otimes du^j$$

である．したがって，(1.18) は，

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik} \tag{1.19}$$

と同値である．あるいは，行列でかくと，

$$dG = \omega \cdot G + G \cdot {}^t\omega \tag{1.20}$$

となる．ここで，G は行列

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

であり，ω は

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_m^1 & \cdots & \omega_m^m \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

である．

適合している計量接続の幾何学的な意味は，平行移動で計量が保たれることである．特に，リーマン多様体では，接ベクトルの長さおよび 2 つの接ベクトルの角は平行移動で不変である．実際，$X(t), Y(t)$ が曲線 $C : u^i = u^i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ に沿って適合している計量接続に関して平行であるとすれば，

$$\begin{cases} \dfrac{dX^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i X^j \dfrac{du^k}{dt} = 0, \\ \dfrac{dY^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i Y^j \dfrac{du^k}{dt} = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_{ij}X^iY^j) &= \frac{dg_{ij}}{dt}X^iY^j + g_{ij}\frac{dX^i}{dt}Y^j + g_{ij}X^i\frac{dY^j}{dt} \\ &= \left(\frac{dg_{ij}}{dt} - g_{ik}\Gamma_{jh}^k\frac{du^h}{dt} - g_{jk}\Gamma_{ih}^k\frac{du^h}{dt}\right)X^iY^j \end{aligned} \tag{1.24}$$

が成り立つ．(1.19) より，第 2 式の右辺は 0 となり，曲線 C に沿って

$$g_{ij}X^iY^j = \text{定数} \tag{1.25}$$

を得る．

定理 1.2 (**リーマン幾何学の基本定理**) M を m 次元一般リーマン多様体とする．このとき，M 上に捩率が 0 で，かつ計量的である接続が一意的に存在する．これを M の**レビ・チビタ接続**あるいは M の**リーマン接続**という．

証明 D は M 上の捩率が 0 で適合している計量接続と仮定し，その接続行列を，局所座標 u^i を用いて $\omega = (\omega_i^j)$ とする．ここで，

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j du^k \tag{1.26}$$

である．このとき，

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}, \tag{1.27}$$

$$\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j \tag{1.28}$$

が成り立つ．ここで，

$$\Gamma_{ijk} = g_{lj}\Gamma_{ik}^l, \qquad \omega_{ik} = g_{lk}\omega_i^l \tag{1.29}$$

とかくと，(1.27) と (1.28) より

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \tag{1.30}$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{kji} \tag{1.31}$$

が成り立つ．(1.30) で，添字の循環をつくると

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij}, \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} \tag{1.33}$$

が得られる．

ここで (1.32) + (1.33)−(1.30) を計算し，(1.31) を用いると

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right), \tag{1.34}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) \tag{1.35}$$

を得る．したがって，捩率が 0 でありかつ計量的である接続が，この計量テンソルより一意的に決まる．

逆に，(1.35) で与えられた Γ_{ij}^k は，局所座標変換 (第 4 章の (2.5)) によって接続係数の変換法則をみたす．したがって，それは M 上の一つのアファイン接続である．さらに，(1.30) と (1.31) をみたすということが，計算によりわかる．したがって，D は M 上での捩率が 0 の計量アファイン接続である． □

レビ・チビタ接続の存在と一意性はリーマン幾何学のもっとも重要な結果である．(1.34) と (1.35) で定義された Γ_{ikj} と Γ^k_{ij} はそれぞれ第一種，第二種の**クリストッフェル記号**とよばれる．

注意．リーマン多様体の局所座標における自然標構の代わりに任意の標構場を用いるほうがもっと便利である．多様体の局所標構場は，標構束の局所切断である．$(e_1,\dots,e_m)$ を余標構場が $(\theta^1,\dots,\theta^m)$ である標構場とする．次のようにおく．

$$De_i=\theta^j_i e_j. \tag{1.36}$$

ただし，$\theta=(\theta^j_i)$ は $(e_1,\dots,e_m)$ に関する接続 D の接続行列である．ここで，θ^i,θ^j_i は標構束 P 上の 1 次微分形式 θ^i と θ^j_i の局所切断への引き戻しにほかならない (ここでは同じ記号を使う)．

したがって，接続の構造方程式を用いると，D が捩率 0 ということは，θ^i_j が次の方程式

$$d\theta^i-\theta^j\wedge\theta^i_j=0 \tag{1.37}$$

をみたすことである．ここで，記号

$$g_{ij}=G(e_i\,,\,e_j) \tag{1.38}$$

を用いると，その計量は

$$ds^2=g_{ij}\theta^i\theta^j$$

である．$G=g_{ij}\theta^i\otimes\theta^j$ であるので，

$$DG=(dg_{ij}-g_{ik}\theta^k_j-g_{kj}\theta^k_i)\otimes\theta^i\otimes\theta^j$$

が得られる．したがって，D が適合している計量接続である条件は，

$$dg_{ij}=\theta^k_i g_{kj}+\theta^k_j g_{ik} \tag{1.39}$$

である．

定理 1.2 は次のようにも述べられる．

定理 1.3 (M,G) を一般リーマン多様体とし，$\{\theta^i, 1\le i\le m\}$ を近傍 $U\subset M$ で 1 次独立な 1 次微分形式とする．このとき，U 上に

$$\begin{aligned} d\theta^i&=\theta^j\wedge\theta^i_j=0,\\ dg_{ij}&=\theta^k_i g_{kj}+\theta^k_j g_{ik}\end{aligned} \tag{1.40}$$

をみたす m^2 個の 1 次微分形式 θ^k_j が一意的に存在する．ただし，g_{ij} は局所余

標構場 $\{\theta^i\}$ に関する G の成分である，すなわち，

$$G = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \tag{1.41}$$

である．

注意 1. M をリーマン多様体とし，G は正定値であるとしよう．このとき，U 上に $g_{ij} = \delta_{ij}$ である直交標構場 $\{e_i, 1 \leq i \leq m\}$ を選ぶことができる．この場合は，

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m} (\theta^i)^2$$

とかける．ここで (1.40) の第 2 式は

$$\theta_i^j + \theta_j^i = 0 \tag{1.42}$$

となり，接続行列 $\theta = (\theta_i^j)$ は歪対称である．

注意 2. (1.30) は

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{il}\Gamma_{jk}^l + g_{jl}\Gamma_{ik}^l,$$

あるいは

$$g_{ij,k} = 0 \tag{1.43}$$

とかけるので，この式は条件 (1.18) の別の表し方である．適合している計量接続では，計量テンソル g_{ij} は絶対微分に関して定数のような扱いになる．

レビ・チビタ接続 ω の曲率行列は

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

であり，(1.20) の外微分は

$$\begin{aligned} d\omega \cdot G - \omega \wedge dG + dG \wedge {}^t\omega + G \cdot {}^t(d\omega) = 0, \\ (d\omega - \omega \wedge \omega) \cdot G + G \cdot {}^t(d\omega - \omega \wedge \omega) = 0, \end{aligned}$$

すなわち

$$\Omega \cdot G + {}^t(\Omega \cdot G) = 0 \tag{1.44}$$

である．ここで，

$$\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj} \tag{1.45}$$

とおくと，$\Omega \cdot G = (\Omega_{ij})$ であり，(1.44) は

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0 \tag{1.46}$$

とかくことができる．すなわち Ω_{ij} は下付添字に関して歪対称である．直接計算して

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_i^l \wedge \omega_{jl} \tag{1.47}$$

となる．

さらに，第 4 章の (2.22) より，

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R^j_{ikl} du^k \wedge du^l \tag{1.48}$$

を得る．ただし，

$$R^j_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial u^l} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl} \tag{1.49}$$

である．ここで，

$$R_{ijkl} = R^h_{ikl} g_{hj} \tag{1.50}$$

とおくと，

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} du^k \wedge du^l \tag{1.51}$$

となり，

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial u^l} + \Gamma^h_{ik}\Gamma_{jhl} - \Gamma^h_{il}\Gamma_{jhk} \tag{1.52}$$

とかける．この R_{ijkl} は $(0,4)$ 型共変テンソルであり，M 上の一般リーマン計量から完全に計算できる．これを一般リーマン多様体の**曲率テンソル**という．

曲率テンソルは，次の性質をもっている．

定理 1.4　一般リーマン多様体の曲率テンソル R_{ijkl} は次の性質をもつ．

1) $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$,

2) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$,

3) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

証明　1)　(1.46) と (1.52) より直ちに示される．

2)　レビ・チビタ接続は捩率が 0 なので，

$$du^i \wedge \omega_{ij} = 0 \tag{1.53}$$

が成り立つ．この式を外微分し，(1.47) を用いると，

$$du^i \wedge (\Omega_{ij} - \omega_i^l \wedge \omega_{jl}) = 0,$$

$$du^i \wedge \Omega_{ij} = 0$$

を得る．この式を (1.51) に代入すると

$$\begin{aligned} R_{jikl}du^i \wedge du^k \wedge du^l &= 0, \\ (R_{jikl} + R_{jkli} + R_{jlik})\, du^i \wedge du^k \wedge du^l &= 0 \end{aligned} \tag{1.54}$$

となる．R_{ijkl} は k と l に関して歪対称なので，上記の方程式の添数は，後の三つの指標に関して歪対称である．すなわち

$$R_{jikl} + R_{jkli} + R_{jlik} = 0 \tag{1.55}$$

が成り立つ．

3) (1.55) より

$$R_{ijkl} + R_{ikjl} + R_{iljk} = 0$$

を得る．この式を (1.55) より引くと，

$$2R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{ljik} + R_{iljk} + R_{jkil} = 0$$

を得る．同様にして

$$2R_{klij} + R_{kijl} + R_{jlki} + R_{kjli} + R_{likj} = 0$$

を得る．ここで，性質 1) を用いると，

$$R_{ijkl} = R_{klij} \tag{1.56}$$

を得る． □

定理 1.4 の系として

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 \tag{1.57}$$

が成り立つ．さらに，(1.43) より，

$$R_{ijkl,h} = (g_{jp}R^p_{ikl})_{,h} = g_{jp}R^p_{ikl,h}$$

成り立つので，第 4 章の定理 2.2 より

$$R_{ijkl,h} + R_{ijlh,k} + R_{ijhk,l} = 0 \tag{1.58}$$

が得られる．この式は**ビアンキの恒等式**といわれる．

注意．リーマン多様体の概念は，リーマンベクトル束へと一般化できる．(E, M, π) を実ベクトル束とする．任意の $p \in M$ に対して，そのファイバー $\pi^{-1}(p)$ 上に非退化対称双 1 次関数 G が与えられているとする．さらに，E の 2 つの滑らかな切断 X, Y に対して，$G(X, Y)$ は M 上の滑らかな関数であるとき，E を**一般リーマンベクトル束**という．G が正定値ならば，E は**リーマンベクトル束**といい，G は E 上の**リーマン構造**とよばれる．

定理 1.1 と同様に，任意の実ベクトル束にリーマン構造が存在する．さらに一般リーマンベクトル束にも適合している計量接続を定義できる．

リーマン多様体のテンソル束は自然にリーマンベクトル束とみなせる．例えば，テンソル束 $T_2^1(M)$ をとると，$a, b \in T_2^1(M)$ に対して a と b の内積は

$$a \cdot b = \sum_{\substack{i,j,k \\ l,r,s}} g^{ij} g^{kl} g_{rs} a_{ik}^r b_{jl}^s \tag{1.59}$$

で与えられる．

§5-2　測地標準座標

定義 2.1　M が m 次元リーマン多様体で，曲線 C はレビ・チビタ接続に関して M 上の測地線であるとき，C はリーマン多様体 M の**測地線**とよばれる．

局所座標 u^i を用いたレビ・チビタ接続 D の接続係数を Γ_{jk}^i で表すと，曲線 $C : u^i = u^i(t)\ (1 \leq i \leq m)$ が測地線であることは，次の連立 2 階常微分方程式

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0 \tag{2.1}$$

で表せる．定義より，曲線 C の接ベクトル $X^i = du^i/dt$ をとると，この測地線の接ベクトルはレビ・チビタ接続に関して曲線に沿って平行であり，平行移動で計量を保つ．したがって，測地線の接ベクトルの長さは一定である．すなわち，

$$g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 一定,$$

つまり

$$\frac{ds}{dt} = 一定 \tag{2.2}$$

が成り立つ．したがって，リーマン多様体の測地線のパラメーターは弧長 s について 1 次式となる．すなわち，

$$t = \lambda s + \mu \tag{2.3}$$

が成り立つ．ここで，$\lambda\ (\neq 0)$ および μ は定数である．

次に，1 点を通る測地線の座標が弧長の 1 次式となる特別な座標を考えよう．まず，M はアファイン接続空間としてこの問題を議論する．

座標系 $(U; u^i)$ で，測地線の方程式は

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=0 \tag{2.4}$$

与えられているとしよう．このとき，常微分方程式の理論より，任意の $x_0 \in U$ に対して，次をみたすような x_0 の近傍 $W \subset U$ と正数 r, δ が存在する．任意の初期値 $x \in W$ と $\|\alpha\| < r$ (脚注参照[1]) である $\alpha \in \mathbb{R}^m$ に対して，微分方程式 (2.4) は U において一意の解[2]

$$u^i = f^i(t, x^k, \alpha^k), \qquad |t| < \delta \tag{2.5}$$

をもつ．ただし，初期条件

$$\begin{cases} u^i(0) = f^i(0, x^k, \alpha^k) = x^i, \\ \dfrac{du^i}{dt}(0) = \left.\dfrac{\partial f^i(t, x^k, \alpha^k)}{\partial t}\right|_{t=0} = \alpha^i \end{cases} \tag{2.6}$$

をみたす．また，関数 f^i は独立変数 t，初期値 x^k, α^k に関して滑らかである．

0 でない定数 c に対して，関数 $f^i(ct, x^k, \alpha^k)$ $(x \in W,\ \|\alpha\| < r,\ t < \delta/|c|)$ は，(2.4) および

$$\begin{cases} f^i(ct, x^k, \alpha^k)|_{t=0} = x^i, \\ \left.\dfrac{\partial f^i(ct, x^k, \alpha^k)}{\partial t}\right|_{t=0} = c\alpha^i \end{cases} \tag{2.7}$$

をみたす．(2.4) の解の一意性より，$\|\alpha\|, \|c\alpha\| < r$ および $|t|, |ct| < \delta$ に対して

$$f^i(ct, x^k, \alpha^k) = f^i(t, x^k, c\alpha^k) \tag{2.8}$$

が成り立つ．$x \in W$, $\|\alpha\| < r$, $|t| < \delta/|c|$ であれば，上記の左辺はいつでも解となる．したがって，その解は右辺で表すことができる．つまり，$x \in W$, $|t| < \delta/|c|$ および $\|\alpha\| < |c|r$ に対して，解 $f^i(t, x^k, \alpha^k)$ はつねに定義できる．特に，$|c| < \delta$ にとると，$x \in W$, $|t| \leq 1$, $\|\alpha\| < |c|r$ に対して解が定義できる．ここで

$$u^i = f^i(1, x^k, \alpha^k) \tag{2.9}$$

とおくと，

---

1) ここで，$\|\alpha\|$ は $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\alpha^i)^2}$ の意味である．

2) Hurewicz 1966 を参照.

$$f^i(1, x^k, 0) = f^i(0, x^k, \alpha^k) = x^i \tag{2.10}$$

が成り立つ．したがって，$x \in W$ を固定してとると，解 (2.9) は接空間 $T_x(M)$ $(= \mathbb{R}^m)$ の原点の近傍から多様体 M の点 x の近傍への滑らかな写像を与えている．なぜならば，

$$\left.\frac{\partial f^i(1, x^k, t\alpha^k)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f^i(1, x^k, \alpha^k)}{\partial \alpha^j}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha^j$$

であり，さらに，

$$\left.\frac{\partial f^i(1, x^k, t\alpha^k)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f^i(t, x^k, \alpha^k)}{\partial t}\right|_{t=0} = \alpha^i$$

が成り立つので，

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial \alpha^j}\right)_{\alpha=0} = \delta^i_j \tag{2.11}$$

を得る．すなわち，写像 (2.9) は原点 $\alpha = 0$ で正則である．したがって，α^i は多様体 M の局所座標として選ぶことができる．これを x の**測地標準座標**あるいは簡単に**標準座標**という．接空間は線形空間であり，二つの任意の座標系は，非退化線形変換で同一と考えてよいので，M の 1 点における標準座標系は非退化線形変換を除いて一意に決まる．

$\alpha^k = \alpha^k_0$ と固定すると，$t\alpha^k_0$ は t が動くと $T_x(M)$ の原点を通る直線を表し，x から出発する多様体上の測地線の曲線の軌道となる．それは，また接ベクトル (α^k_0) に接触している．したがって，標準座標系 α^i では測地線の方程式は

$$\alpha^k = t\alpha^k_0 \tag{2.12}$$

である．ここで α^k_0 は定数である．

定理 2.1　M が捩率 0 のアフィン接続空間のとき，点 x における標準座標系 α^i をとれば，接続係数 Γ^j_{ik} はその点 x において 0 となる．

証明　標準座標系 α^i では，その測地線 $\alpha^i = t\alpha^i_0$ は (2.4) をみたすので，任意の α^k_0 に対して

$$\Gamma^i_{jk}(0)\alpha^j_0\alpha^k_0 = 0 \tag{2.13}$$

が成り立つ．ところが，捩率 0 の接続では Γ^i_{jk} は下付添字に関して対称であるので，

$$\Gamma^i_{jk}(0) = 0, \qquad 1 \leq i, j, k \leq m \tag{2.14}$$

を得る．　□

定理 2.2 アファイン接続空間 M の任意の点 x_0 において，W の各点が W に含まれる標準座標近傍をもつ x_0 の近傍 W が存在する．

証明 x_0 における標準座標系を $(U; u^i)$ とし，

$$U(x_0; \rho) = \left\{ x \in U \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} (u^i(x))^2 < \rho^2 \right\} \tag{2.15}$$

とおく．方程式 (2.4) の解に関して上で述べた議論より，以下をみたす x_0 の近傍 $W = U(x_0; r)$ と正数 δ が存在する．

$\forall x \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\|\alpha\| < \delta$ に対して，測地線

$$u^i = f^i(t, x^k, \alpha^k), \qquad |t| < 2 \tag{2.16}$$

が一意的に存在する．ただし，初期条件 (x, α^k) をみたすものとする．$B(0;\delta)$ で集合 $\{\alpha \in \mathbb{R}^m | \, \|\alpha\| < \delta\}$ を表すと，解 (2.16) は

$$\varphi(x, \alpha) = (x^k, f^k(1, x^i, \alpha^i)) \tag{2.17}$$

をみたす写像 $\varphi : W \times B(0;\delta) \longrightarrow W \times U$ となっている．ここで，$x \in W$, $\alpha \in B(0;\delta)$ である．解 f^k は x と α の関数として滑らかであるので，φ も滑らかである．(2.11) より

$$\left. \frac{\partial(x^k, f^k)}{\partial(x^i, \alpha^i)} \right|_{(x_0, 0)} = 1$$

が成り立つ．

したがって，φ のヤコビ行列は点 $(x_0, 0) \in W \times B(0;\delta)$ で非退化である．よって，逆関数定理より $\varphi : V \longrightarrow U(x_0; a) \times U(x_0; a)$ が同相となる点 $(x_0, 0) \in W \times B(0;\delta)$ の近傍 V と正数 $a < \delta$ が存在する．任意の $x \in U(x_0; a)$ に対して

$$B_x = \{\alpha \in B(0; a) | \;\; (x, \alpha) \in V\} \tag{2.18}$$

とおくと，(2.16) で定義される写像

$$u^i = f^i(1, x^k, \alpha^k), \qquad \alpha \in B_x \tag{2.19}$$

は B_x から $U(x_0; a)$ への同相写像である．ここで，$W' = U(x_0; a)$ とおくと，上記の式は W' の任意の点に対して W' に含まれる標準座標近傍の存在を示している． □

系 アファイン接続空間 M の各点 x_0 に対して，近傍 W の任意の 2 点が測地曲線で結べるような x_0 の近傍 W が存在する．

注意. より詳細な議論により，この測地線は近傍 W に含まれることを示すことができる．この W を**測地凸近傍**という．後で述べる定理 2.7 は，リーマン多様体がある条件の下では測地凸近傍をもつことを示している．これは適当な調整のもとでアファイン接続空間に対しても成立する．

定理 2.3 捩率 0 のアファイン接続は局所的に曲率テンソルで完全に決まる.

証明 固定した 1 点 O での標準座標系 α^i をとる. 点 O での自然基底をとり, それを O からの測地線に沿って平行に移動すると, O の近傍に標構場 $\{e_i,\, 1 \leq i \leq m\}$ が得られる. e_j の双対 1 次微分形式を θ^i とし, 標構束の 1 次独立な m^2 個の 1 次微分形式 θ_i^j のこの標構場への制限を同じ記号 θ_i^j で表す. そうすると, θ^i, θ_i^j は t, α^k の 1 次微分形式である. α^k が定数であれば θ^i と θ_i^j は測地曲線 $\alpha^i t$ に制限される. 標構場が測地線 $\alpha^i t$ に沿って平行であるので,

$$\begin{cases} \theta^i \equiv \alpha^i dt & (\bmod d\alpha^k), \\ \theta_i^j \equiv 0 & (\bmod d\alpha^k), \end{cases} \tag{2.20}$$

あるいは,

$$\theta^i = \alpha^i dt + \bar{\theta}^i, \qquad \theta_i^j = \bar{\theta}_i^j \tag{2.21}$$

が成り立つ. ここで, $\bar{\theta}^i$ と $\bar{\theta}_i^j$ は θ^i と θ_i^j の項で dt を含まないものである. (2.21) を構造方程式 (§4-3) に代入すると

$$\begin{cases} d\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i = 0, \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j = \dfrac{1}{2} S^j_{ikl}\theta^k \wedge \theta^l \end{cases}$$

であり, dt の項の係数を比較すれば

$$\left(d\alpha^i - \frac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial t} + \alpha^j \bar{\theta}_j^i\right) \wedge dt = 0, \qquad \left(\frac{\partial\bar{\theta}_i^j}{\partial t} - \alpha^k S^j_{ikl}\bar{\theta}^l\right) \wedge dt = 0$$

が成り立つ. ここで, $\partial\bar{\theta}^i/\partial t$, $\partial\bar{\theta}_i^j/\partial t$ はそれぞれ $\bar{\theta}^i$, $\bar{\theta}_i^j$ の t の偏微分によって得られる 1 次微分形式である. 上記の式の括弧の中は dt を含まないので,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial t} = d\alpha^i + \alpha^j \bar{\theta}_j^i, \\ \dfrac{\partial\bar{\theta}_i^j}{\partial t} = \alpha^k S^j_{ikl}\bar{\theta}^l \end{cases} \tag{2.22}$$

を得る. (2.22) は t を独立変数とした常微分方程式系である. 第 1 式を t で微分すると

$$\frac{\partial^2\bar{\theta}^i}{\partial t^2} = \alpha^j \frac{\partial\bar{\theta}_j^i}{\partial t} = \alpha^j \alpha^k S^i_{jkl}\bar{\theta}^l \tag{2.23}$$

となる.

標構 e_i は O の点で任意の方向に平行なので,

$$\left.\bar{\theta}_i^j\right|_{t=0} = 0 \tag{2.24}$$

であり, 一方, 定義より

$$\theta^i|_{t=0} = \alpha^i dt \tag{2.25}$$

が成り立つ．したがって，

$$\bar{\theta}^i\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.26}$$

であり，(2.24) と (2.22) の第 1 式を用いると

$$\frac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial t}\Big|_{t=0} = d\alpha^i \tag{2.27}$$

となる．

与えられた曲率テンソルに対して，連立 2 階常微分方程式 (2.23) は初期条件 (2.6), (2.7) をもつ一意の解が存在する．さらに，$\bar{\theta}_i^j$ は (2.22) の第 1 式によって完全に決定される．したがって，局所的に曲率テンソルは捩率 0 のアファイン接続を完全に決める．

□

多様体 M が m 次元リーマン多様体の場合，接空間 $T_{x_0}(M)$, $x_0 \in M$ に直交基底 F_0 を一つとり固定する．このとき，x_0 における標準座標系 u^i は

$$u^i = \alpha^i s \tag{2.28}$$

である．ここで，(α^i) は $T_{x_0}(M)$ の単位ベクトルとし，s は x_0 からでる測地線の弧長である．標構 F_0 を x_0 から測地線に沿って平行移動することにより x_0 の近傍に直交標構場がつくれるので，定理 2.3 の証明より，

$$\begin{cases} \theta^i = \alpha^i ds + \bar{\theta}^i, \\ \theta_i^j = \bar{\theta}_i^j \end{cases} \tag{2.29}$$

のように表せる．ここで，$\bar{\theta}^i$, $\bar{\theta}_i^j$ は ds は含まないが，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial s} = d\alpha^i + \alpha^j\bar{\theta}_j^i, \\ \dfrac{\partial\bar{\theta}_i^j}{\partial s} = \alpha^k S_{ikl}^j\bar{\theta}^l, \\ \bar{\theta}_i^j + \bar{\theta}_j^i = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

をみたしている．ただし，初期条件

$$\bar{\theta}^i\big|_{s=0} = 0, \qquad \bar{\theta}_i^j\Big|_{s=0} = 0, \qquad \frac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial s}\Big|_{s=0} = d\alpha^i \tag{2.31}$$

を満足する．

ここで，

$$\bar{\theta}^i = s\,d\alpha^i + A_j^i\,d\alpha^j \tag{2.32}$$

のように表すと，A^i_j は次の初期条件

$$A^i_j|_{s=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial A^i_j}{\partial s}\right|_{s=0} = 0 \tag{2.33}$$

をみたす．したがって，点 O の近くでは線素は

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \sum_{i=1}^m (\theta^i)^2 \\ &= ds^2 + 2ds \sum_{i=1}^m \alpha^i \bar{\theta}^i + \sum_{i=1}^m (\bar{\theta}^i)^2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

とかける．ここで $\sum_{i=1}^m \alpha^i d\alpha^i = 0,\ \bar{\theta}^i_j + \bar{\theta}^j_i = 0$ であるので，

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^m \alpha^i \bar{\theta}^i\right) = \sum_{j=1}^m \alpha^i \left(d\alpha^i + \sum_{i=1}^m \alpha^j \bar{\theta}^i_j\right) = 0$$

であり，

$$\sum_{i=1}^m \alpha^i \bar{\theta}^i \Big|_{s=0} = 0$$

が成り立つ．したがって，

$$\sum_{i=1}^m \alpha^i \bar{\theta}^i = 0 \tag{2.35}$$

であり，(2.34) より，点 O の近くでは弧長要素は

$$d\sigma^2 = ds^2 + \sum_{i=1}^m (\bar{\theta}^i)^2 \tag{2.36}$$

となる．

系 $s =$ 一定 である超曲面は点 O から伸びる測地線と直交する．

定理 2.4 リーマン多様体 M の各点 O に，次をみたす標準座標近傍 W が存在する．

1) W の各点は W に含まれる標準座標近傍をもつ．

2) 点 O と点 $p \in W$ を結ぶ測地線は W の中で一意の最短曲線である．

証明 1) は定理 2.2 を M のレビ・チビタ接続に適用すれば得られる．u^i を (2.28) で得られる点 O の標準座標系とすると，1) の標準座標近傍 W は

$$W = \left\{ p \in M \;\middle|\; \sum_{i=1}^m (u^i(p))^2 < \epsilon^2 \right\}$$

で与えられている．ここで ϵ は十分小さい正数である．W は標準座標近傍なので，任意の $p \in W$ に対して，点 O と p を結ぶ測地線 γ で W に含まれるものが一意に存在する．ここで γ の弧長を s_0 としよう．はじめに γ が点 O と p を結ぶ最短の道であることを示そう．

いま，C を W に含まれる点 O と p を結ぶ任意の滑らかな曲線とすると，曲線 C は $u^i = u^i(s)$ (s は γ の弧長) とかけ，その C の弧長は

$$\int_0^{s_0} d\sigma = \int_0^{s_0} \sqrt{ds^2 + \sum_{i=1}^m (\bar{\theta}^i)^2} \geq \int_0^{s_0} ds = s_0 \tag{2.37}$$

で与えられる．もし C が W に含まれる点 O と p を結ぶ最短の道ならば，(2.37) において等号が成り立つ．したがって，C に沿っては

$$\bar{\theta}^i = 0$$

である．したがって，(2.32) より

$$d\alpha^i + \sum_{j=1}^m A_j^i \frac{d\alpha^j}{s} = 0 \tag{2.38}$$

が成り立つ．A_j^i は初期条件 (2.33) をみたし，$A_j^i = o(s)$ であるので，(2.38) で $s \to 0$ とすると

$$d\alpha^i = 0, \qquad \alpha^i = 一定$$

であり，結局 C は O と p を結ぶ測地線になる．したがって，$C = \gamma$ である．　□

定理 2.5 U を点 O における標準座標近傍とすると，任意の $0 < \delta < \epsilon$ に対して定義される超球

$$\Sigma_\delta = \left\{ p \in U \;\middle|\; \sum_{i=1}^m (u^i(p))^2 = \delta^2 \right\}$$

で次の性質をもつ正の数 ϵ が存在する．

1) Σ_δ の各点と O は U に含まれる一意の最短測地線で結ぶことができる．

2) Σ_δ に接する任意の測地線はその接点の近傍で必ず Σ_δ の外部になる．

証明　W を定理 2.4 で用いたのと同じ標準座標近傍とすると，W は半径 ϵ の球の内部

$$W = \left\{ p \in U \;\middle|\; \sum_{i=1}^m (u^i(p))^2 < \epsilon^2 \right\}$$

と考えてよい．$0 < \delta < \epsilon$ のとき，$\Sigma_\delta \subset W \subset U$ および U は標準座標近傍であるので，定理 2.4 の系として性質 1) が成立する．ここで，ϵ を小さくすれば性質 2) が成り立つことがわかる．

ところで，$(U;u^i)$ は標準座標系であるので，定理 2.1 より

$$\Gamma^j_{ik}(0) = 0 \tag{2.39}$$

が成り立つ．超球 Σ_δ は

$$F(u^1,\ldots,u^m) = \frac{1}{2}[(u^1)^2 + \cdots + (u^m)^2 - \delta^2] = 0 \tag{2.40}$$

と表せるので，曲線 γ を点 p で Σ_δ に接する測地線とすると，その方程式は

$$u^i = u^i(\sigma) \tag{2.41}$$

である．ここで，σ は点 p から測った γ の弧長である．このとき，

$$F(u^i(\sigma))|_{\sigma=0} = 0 \tag{2.42}$$

である．

超球 Σ_δ は点 O からでる測地線と直交しているので，点 p で Σ_δ と接する測地線 γ は点 p と O で結ぶ測地線とも直交しなければならない．したがって，

$$\sum_{i=1}^m u^i(\sigma)\left.\frac{du^i}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0 \tag{2.43}$$

が成り立つ．直接に計算して，

$$\left.\frac{d}{d\sigma}F(u^i(\sigma))\right|_{\sigma=0} = \sum_{i=1}^m u^i(\sigma)\left.\frac{du^i}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0, \tag{2.44}$$

$$\left.\frac{d^2}{d\sigma^2}F(u^i(\sigma))\right|_{\sigma=0} = \sum_{i,j=1}^m \left[\delta_{ij} - \sum_{k=1}^m u^k(p)\Gamma^k_{ij}(p)\right]\left(\frac{du^i}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{du^j}{d\sigma}\right)_0 \tag{2.45}$$

であるので，

$$F(u^i(\sigma)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \left[\delta_{ij} - \sum_{k=1}^m u^k(p)\Gamma^k_{ij}(p)\right]\left(\frac{du^i}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{du^j}{d\sigma}\right)_0 \cdot \sigma^2 + o(\sigma^2) \tag{2.46}$$

が成り立つ．

(2.39) より，Γ^k_{ij} の値は O の近傍で十分小にとれるので，$0 < \delta < \epsilon$ のときに (2.45) がいつでも正になるように十分小さい ϵ をとることができる．したがって，測地線 (2.41) は点 p で Σ_δ とただ 1 点で交わり，点 p の近くでは明らかに Σ_δ の外部にある．　□

リーマン多様体の幾何学を学ぶときの有効な手法は，多様体上に距離関数を導入し，多様体を距離空間にすることである．

定義 2.2　連結なリーマン多様体 M の任意の 2 点 p,q に対して，$\rho(p,q)$ を

$$\rho(p,q) = \inf \widehat{pq} \tag{2.47}$$

で定義する．ここで $\widehat{pq}$ は p と q を結ぶ曲線を弧長で測った長さである．このとき関数 $\rho(p,q)$ を 2 点間の**距離**という．

M が連結より，任意の 2 点 p と q を結ぶ弧長で測ることのできる曲線が存在するので，(2.47) はいつも定義され，$M \times M$ 上の実関数である．

定理 2.6 関数 $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ は次の性質をもつ．

1) 任意の $p, q \in M$ に対して $\rho(p,q) \geq 0$ である．ただし等号が成立するのは $p = q$ のときに限る．
2) $\rho(p,q) = \rho(q,p)$.
3) 任意の 3 点 $p, q, r \in M$ に対して，$\rho(p,q) + \rho(q,r) \geq \rho(p,r)$.

したがって，ρ は M 上の距離関数となり，M は距離空間となる．さらに，距離空間としての M の位相は多様体の位相と一致する．

証明 (2.47) の定義より，上記の性質が成り立つのは明らかである．ここでは，$p \neq q$ のとき $\rho(p,q) > 0$ であることを示す．

M の任意の 2 点 p, q $(p \neq q)$ に対して，M はハウスドルフ空間であるので，p の近傍 U で $q \notin U$ であるような U が存在する．定理 2.4 より，その標準座標が $u^i = \alpha^i s$ である点 p の近傍 $W \subset U$ が存在する．ただし，$\sum_{i=1}^{m} (\alpha^i)^2 = 1$ で $0 \leq s \leq s_0$ である．δ を $0 < \delta < s_0$ にとると超曲面 $\Sigma_\delta \subset W$ となり，γ は p と q を結ぶ曲線であるので，γ の長さは少なくとも δ である．すなわち，

$$\rho(p,q) \geq \delta > 0$$

が成り立つ．

定理 2.5 より，Σ_δ の内部は

$$\{q \in M \mid \rho(p,q) < \delta\}$$

であり，これは M を距離空間と考えたときに点 p の δ 開球近傍である．したがって，距離空間としての位相と多様体 M としてのもともとの位相は一致する． □

W が 1 点 O において定理 2.4 における開球標準座標近傍とすれば，任意の点 $p \in W$ について W に含まれる O と p を結ぶ測地線の長さは $\rho(O,p)$ である．

定理 2.7 リーマン多様体 M の任意の点 p において，η は十分小さなの正数であり，W の任意の 2 点が一意の測地線で結ばれるような η 開球近傍 W が存在する．

上記の条件をみたす任意の近傍を**測地凸近傍**という．したがって，この定理によると，リーマン多様体の任意の点は測地凸近傍をもつことがわかる．

証明 $p \in M$ とすると，定理 2.4 より U の任意の点 p に対して半径が ϵ の開球標準座標近傍 U が存在し，U の点 q で U を含む標準座標近傍 V_q がある．ここで，ϵ を定理 2.5 の条件をみたすようにとり，$\eta \leq \frac{1}{4}\epsilon$ としよう．このとき p の η 開球近傍 W は p の測地凸近傍である．

任意の $q_1, q_2 \in W$ に対しては

$$\rho(q_1, q_2) \leq \rho(p, q_1) + \rho(p, q_2) < 2\eta \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.48}$$

が成り立つ．q_1 における $\epsilon/2$ 開球近傍 $U(q_1; \epsilon/2)$ に対して，(2.48) より $q_2 \in U(q_1; \epsilon/2)$ であるので，任意の $q \in U(q_1; \epsilon/2)$ に対して，

$$\rho(p, q) \leq \rho(p, q_1) + \rho(q_1, q) < \frac{3\epsilon}{4}$$

が成り立つ．したがって，

$$U\left(q_1; \frac{\epsilon}{2}\right) \subset U \subset V_{q_1} \tag{2.49}$$

であり，q_1 の $\epsilon/2$ 開球近傍は q_1 における標準座標近傍に含まれる．定理 2.4 と定理 2.6 の証明で述べた議論より，点 q_1 と q_2 を結ぶ一意の測地線 γ で，その長さが $\rho(q_1, q_2)$ であり，$U(q_1; \epsilon/2)$ に含まれるものが存在する．特に，$r \in \gamma$ に対して

$$\rho(q_1, r) \leq \rho(q_1, q_2) \tag{2.50}$$

が成り立つ．

最後に，測地線 γ は W の内部にあることを示そう．$\gamma \subset U(q_1; \epsilon/2) \subset U$ なので，関数 $\rho(p, q)$ $(q \in \gamma)$ は有界である．$q_1, q_2 \in W$ で，γ が W の内部にすべては含まれてはいないとすれば，関数 $\rho(p, q)$ $(q \in \gamma)$ は γ の内点 q_0 において最大値をとる．$\delta = \rho(p, q_0)$ とおくと $\delta < \epsilon$ であり，超球 Σ_δ は q_0 で γ に接している．したがって，定理 2.5 より，γ は完全に q_0 の近くで Σ_δ の外部にあることになり，これは関数 $\rho(p, q)$ $(q \in \gamma)$ が q_0 で最大値をとることに矛盾する．したがって，$\gamma \subset W$ となる． □

§5-3 断面曲率

M は m 次元リーマン多様体で，その局所座標系を u^i とすると，その共変 $(0, 4)$ 型の曲率 R は

$$R = R_{ijkl} du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l \tag{3.1}$$

とかける．

ここで，R_{ijkl} は (1.50) で定義される．(0,4) 型の共変テンソルは (4,0) 型の反変テンソル空間の線形写像 (§2-2 参照) であるので，各点 $p \in M$ に対して多重線形関数

$$R : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow R$$

が

$$R(X, Y, Z, W) = \langle X \otimes Y \otimes Z \otimes W \,,\, R \rangle \tag{3.2}$$

で定義される．ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は第 2 章の (2.17) の意味である．なお，

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Z = Z^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad W = W^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{3.3}$$

とおけば，

$$R(X, Y, Z, W) = R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l \tag{3.4}$$

である．特に，

$$R_{ijkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) \tag{3.5}$$

が成り立つ．

§4-2 で，すでに接続 D の曲率テンソルは曲率作用素であると説明したように，任意の $Z, W \in T_p(M)$ に対して $R(Z, W)$ は

$$R(Z, W)X = R^j_{ikl} X^i Z^k W^l \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{3.6}$$

で定義される $T_p(M)$ から $T_p(M)$ への線形写像である．

リーマン多様体 M のレビ・チビタ接続を D とすると

$$R(X, Y, Z, W) = (R(Z, W)X) \cdot Y \tag{3.7}$$

である．ここで，記号 “$\cdot$” は (1.4) で定義される内積である．定理 1.4 より，4 重線形関数 $R(X, Y, Z, W)$ は，以下の性質

1) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z) = -R(Y, X, Z, W)$,
2) $R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0$,
3) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

をみたす．

リーマン多様体 M の基本テンソルを G とすれば，

$$G(X, Y, Z, W) = G(X, Z)G(Y, W) - G(X, W)G(Y, Z) \tag{3.8}$$

である 4 重線形関数が定義できる．明らかに，この関数は各変数について線形であり，$R(X,Y,Z,W)$ と同じように性質 1)–3) をみたす．

ここで，$X,Y \in T_p(M)$ に対して，

$$\begin{aligned} G(X,Y,X,Y) &= |X|^2 \cdot |Y|^2 - (X \cdot Y)^2 \\ &= |X|^2 \cdot |Y|^2 \cdot \sin^2 \angle(X,Y) \end{aligned} \tag{3.9}$$

である．したがって，X,Y が 1 次独立の場合，$G(X,Y,X,Y)$ はちょうど接ベクトル X,Y で張られる平行四辺形の面積の 2 乗である．したがって，$G(X,Y,X,Y) \neq 0$ である．

X',Y' を点 p における他の 1 次独立な接ベクトルとし，X と Y で張られる同じ 2 次元接空間 E を張るとすると

$$X' = aX + bY, \qquad Y' = cX + dY$$

とかける．ここで $ad - bc \neq 0$ である．性質 1)–3) により，

$$\begin{aligned} R(X',Y',X',Y') &= (ad-bc)^2 R(X,Y,X,Y), \\ G(X',Y',X',Y') &= (ad-bc)^2 G(X,Y,X,Y) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，

$$\frac{R(X',Y',X',Y')}{G(X',Y',X',Y')} = \frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)}$$

である．

これは，上記の値が接空間 $T_p(M)$ の 2 次元部分空間の関数であり，X と Y の選び方によらないことを示している．

定義 3.1 E を接空間 $T_p(M)$ の 2 次元部分空間とし，X,Y を E の 2 つの 1 次独立なベクトルとすると，

$$K(E) = -\frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)} \tag{3.10}$$

は E の関数となり，E のベクトル X と Y のとり方によらない．これを (p,E) における多様体 M の**リーマン曲率**あるいは**断面曲率**という．

3 次元ユークリッド空間における曲面上の 1 点における 2 つの主曲率の積は，その点における曲面の**全曲率**，あるいは**ガウス曲率**とよばれるのはよく知られ

ている．Gauss はこの定理を「驚くべき」(**驚愕定理**) と述べた．なぜならば，一点における曲面の全曲率は外在的，すなわちその定義には曲面の第一基本形式のみならず第二基本形式も用いるのであるが，全曲率 K は曲面の第一基本形式のみに依存する．すなわち，

$$K = -\frac{R_{1212}}{g} \tag{3.11}$$

となるのである．ここで，$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ であり，R_{1212} は (1.52) で定義されて，

$$R_{1212} = \frac{\partial \Gamma_{122}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{121}}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^h \Gamma_{2h2} - \Gamma_{12}^h \Gamma_{2h1} \tag{3.12}$$

である．

このことは，断面曲率の幾何学的な意味を与えてくれる．次元を $m \geq 3$ として，E を $T_p(M)$ の 2 次元部分空間とする．p において E は $\{e_1, e_2\}$ で張られるような直交基底 $\{e_i\}$ を選ぼう．この標構で定まる測地標準座標系を u^i とする．ここで，p から出発し，E に接するようなすべての測地曲線の 2 次元部分多様体 S をとると，S の方程式は明らかに

$$u^r = 0, \qquad 3 \leq r \leq m \tag{3.13}$$

でかける．ただし，(u^1, u^2) は点 p における S の標準座標である．S は点 p において E に接する**測地部分多様体**という．では，(p, E) における多様体 M の断面曲率 $K(E)$ は，点 p における曲面 S (M からの誘導リーマン計量をもつ) の全曲率とちょうど一致することを示そう．

点 p の近傍で M のリーマン計量は

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j \tag{3.14}$$

であるとしよう．このとき，S の誘導計量は

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta, \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \tag{3.15}$$

であり，

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u^1, u^2) = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2, 0, \ldots, 0) \tag{3.16}$$

である．したがって，

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}|_S = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\right)\bigg|_S$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\right)$$

$$= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} \tag{3.17}$$

が成り立つ.

(u^i) と (u^α) はそれぞれ M および S の標準座標なので, 定理 2.1 より

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(p) = \Gamma_{ijk}(p) = 0 \tag{3.18}$$

である. したがって,

$$R_{1212}(p) = \left(\frac{\partial \Gamma_{122}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{121}}{\partial u^2} + \Gamma^i_{11}\Gamma_{2i2} - \Gamma^i_{12}\Gamma_{2i1}\right)_p$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{122}}{\partial u^1} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{121}}{\partial u^2}\right) = \bar{R}_{1212}(p) \tag{3.19}$$

が成り立ち, これを用いると, (p, E) における M の断面曲率は

$$K(E) = -\frac{R(e_1, e_2, e_1, e_2)}{G(e_1, e_2, e_1, e_2)}$$

$$= -\left.\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\right|_p$$

$$= -\left.\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2}\right|_p = \bar{K}(p)$$

である. ここで, 右辺は点 p における曲面 S の全曲率そのものである.

次の定理は断面曲率の重要性を示している.

定理 3.1 点 p におけるリーマン多様体 M の曲率テンソルは, 点 p のすべての 2 次元接部分空間の断面曲率によって一意に決定する.

証明 曲率テンソル $R(X, Y, Z, W)$ の条件 1)–3) をみたす 4 重線形関数 $\bar{R}(X, Y, Z, W)$ が存在し, 点 p において 1 次独立な任意の接ベクトル X, Y に対して

$$\frac{\bar{R}(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)} = \frac{R(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)} \tag{3.20}$$

が成り立つと仮定する.

このとき, 任意の $X, Y, Z, W \in T_p(M)$ に対して

$$\bar{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) \tag{3.21}$$

が成立することを示す．いま，

$$S(X,Y,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) - R(X,Y,Z,W) \tag{3.22}$$

とおくと，S は 4 重線形関数で，条件 1)–3) を満足し，(3.20) より任意の $X, Y \in T_p(M)$ に対して

$$S(X,Y,X,Y) = 0 \tag{3.23}$$

である．したがって，(3.21) は S が恒等的に 0 であることと同値である．

(3.23) より

$$S(X+Z,Y,X+Z,Y) = 0$$

である．関数 S の性質を用いると，$T_p(M)$ の三つのベクトル X, Y, Z に関して

$$S(X,Y,Z,Y) = 0 \tag{3.24}$$

である．したがって，

$$S(X,Y+W,Z,Y+W) = 0$$

であり，

$$S(X,Y,Z,W) + S(X,W,Z,Y) = 0 \tag{3.25}$$

を得る．

性質 1) を用いると

$$\begin{aligned} S(X,Y,Z,W) &= -S(X,W,Z,Y) = S(X,W,Y,Z) \\ &= -S(X,Z,Y,W) = S(X,Z,W,Y) \end{aligned} \tag{3.26}$$

であるので，性質 2) より

$$S(X,Y,Z,W) + S(X,Z,W,Y) + S(X,W,Y,Z) = 0$$

が成り立つ．したがって，

$$3S(X,Y,Z,W) = 0 \tag{3.27}$$

であるので，証明された． □

定義 3.2 リーマン多様体 M で，点 p における断面曲率 $K(E)$ が定数 (すなわち E のとり方によらない) ならば，M は点 p で**遊走**であるという．

M が点 p で遊走ならば，点 p における M の断面曲率は $K(p)$ と表せる．したがって，任意の $X, Y \in T_p(M)$ に対して

$$R(X,Y,X,Y) = -K(p)G(X,Y,X,Y) \tag{3.28}$$

である．

他方，定理 3.1 の証明を用いて，任意の $X, Y, Z, W \in T_p(M)$ に対して，

$$R(X, Y, Z, W) = -K(p)G(X, Y, Z, W) \tag{3.29}$$

が成り立つ．したがって，点 p で遊走であるリーマン多様体は

$$R_{ijkl}(p) = -K(p)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})(p),$$

あるいは，

$$\Omega_{ij}(p) = \frac{1}{2}R_{ijkl}(p)du^k \wedge du^l = -K(p)\theta_i \wedge \theta_j(p) \tag{3.30}$$

とかける．ここで，

$$\theta_i = g_{ij}du^j \tag{3.31}$$

である．

定義 3.3 リーマン多様体 M はすべての点で遊走であり，断面曲率 $K(p)$ が M 上で定数ならば，多様体 M は**定曲率空間**という．

球，平面ならびに擬球は，すべて 3 次元ユークリッド空間において，その全曲率が定数である曲面である．したがって，これらは，すべて 2 次元定曲率リーマン空間である．

定理 3.2 (**シュアーの定理**) 各点で遊走である連続な m 次元リーマン多様体 M に対して，$m \geq 3$ ならば M は定曲率空間となる．

証明 M は各点で遊走であるので，(3.30) より

$$\Omega_{ij} = -K\theta_i \wedge \theta_j \tag{3.32}$$

が成り立つ．ここで，K は M 上の滑らかな関数であり，θ_i は (3.31) である．(3.32) を外微分して

$$d\Omega_{ij} = -dK \wedge \theta_i \wedge \theta_j - Kd\theta_i \wedge \theta_j + K\theta_i \wedge d\theta_j \tag{3.33}$$

となる．他方，

$$d\theta_i = dg_{ij} \wedge du^j = (g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k) \wedge du^j = (\omega_{ji} + \omega_{ij}) \wedge du^j$$

である．ただし，ここで，

$$\omega_{ij} = g_{jk}\omega_i^k = \Gamma_{ijk}du^k$$

とおいた．

レビ・チビタ接続は捩率が 0 であるので，

$$\omega_{ji} \wedge du^j = \Gamma_{jik} du^k \wedge du^j = 0$$

が成り立ち，

$$d\theta_i = \omega_{ij} \wedge du^j = \omega_i^j \wedge \theta_j \tag{3.34}$$

となる．

他方，ビアンキの恒等式 (第 4 章の定理 2.2) より

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij} &= d(\Omega_i^l \cdot g_{lj}) \\ &= d\Omega_i^l \cdot g_{lj} + \Omega_i^l \wedge dg_{lj} \\ &= (\omega_i^k \wedge \Omega_k^l - \Omega_i^k \wedge \omega_k^l) \cdot g_{lj} + \Omega_i^l \wedge (\omega_{lj} + \omega_{jl}) \\ &= \omega_i^k \wedge \Omega_{kj} + \Omega_{ik} \wedge \omega_j^k \end{aligned} \tag{3.35}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij} &= -K\omega_i^k \wedge \theta_k \wedge \theta_j - K\theta_i \wedge \theta_k \wedge \omega_j^k \\ &= -Kd\theta_i \wedge \theta_j + K\theta_i \wedge d\theta_j \end{aligned} \tag{3.36}$$

を得る．

(3.36) と (3.33) を比較すると，

$$dK \wedge \theta_i \wedge \theta_j = 0 \tag{3.37}$$

である．ここで局所余標構である $\{\theta_i\}$ と $\{du^i\}$ を用いると，

$$dK = \sum_{i=1}^{m} a^i \theta_i$$

とかける．$m \geq 3$ なので，任意の 3 つの添字 $1 \leq i < j < k \leq m$ に関して

$$dK \wedge \theta_i \wedge \theta_j = dK \wedge \theta_j \wedge \theta_k = dK \wedge \theta_i \wedge \theta_k = 0$$

である．したがって，$a^i = 0 \ (1 \leq i \leq m)$ であり，

$$dK = 0 \tag{3.38}$$

が成り立つ．

M は連結なので，K は M 上で定数である． □

例. K を実定数として

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^m)^2}{[1 + \frac{K}{4}((u^1)^2 + \cdots + (u^m)^2)]^2} \tag{3.39}$$

とおくと，線素 ds^2 をもつリーマン空間は定曲率空間であり，その断面曲率は

K である (証明は読者にまかせる).

(3.39) は B. Riemann が 1854 年にドイツのゲッチンゲン大学における大学教員資格就任講演で述べた「幾何学の基本的仮定について」の中で示された. この講演は現在リーマン幾何学として知られている概念の出発点になったのである.

§5-4　ガウス–ボンネの定理

ガウス–ボンネの定理は大域微分幾何学における古典的な定理である. それは, リーマン多様体の局所的な性質と大域的なものとの関係を示すものである. 本章では, 2 次元リーマン多様体の場合の証明をしよう.

M は向き付けられた 2 次元リーマン多様体とし, M の向きに合致する向き付けられた近傍 U の滑らかな標構場 $\{e_1, e_2\}$ をとると, 余標構 $\{\theta^1, \theta^2\}$ を用いてリーマン計量は

$$ds^2 = g_{ij}\theta^i\theta^j, \qquad 1 \leq i, j \leq 2 \tag{4.1}$$

で与えられる. ここで, $g_{ij} = G(e_i, e_j)$ である.

リーマン幾何学の基本定理より

$$\begin{cases} d\theta^i - \theta^j \wedge \theta^i_j = 0, \\ dg_{ij} = g_{ik}\theta^k_j + g_{kj}\theta^k_i \end{cases} \tag{4.2}$$

をみたす 1 次微分形式 θ^j_i が一意に存在する. θ^j_i は M 上のレビ・チビタ接続を定義するので,

$$De_i = \theta^j_i e_j \tag{4.3}$$

であり, その曲率形式は

$$\Omega^j_i = d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k \tag{4.4}$$

である.

$\Omega_{ij} = \Omega^k_i g_{kj}$ とおくと, (1.46) より Ω_{ij} は歪対象であるので, 添字 i, j が 1 と 2 の値をとるとき, 曲率形式 Ω_{ij} の中で, 0 でない要素は Ω_{12} のみである.

局所標構場の変数で Ω_{12} がどのような変換規則になるかを調べるために, Ω

の曲率行列を (Ω_i^j) とかき，基本テンソルを

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

とかく．

(e_1', e_2') を M 上の向きと合致する座標近傍 $W \subset M$ の他の局所座標場とすると，$U \cap W$ において，$U \cap W \neq \varnothing$ の場合，

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

で表せる．ここで，

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \det A > 0$$

である．

G' と Ω' を標構場 (e_1', e_2') における対応するものとすると

$$G' = A \cdot G \cdot {}^t A, \qquad \Omega' = A \cdot \Omega \cdot A^{-1} \tag{4.7}$$

が成り立つ．ここで，第 2 式は第 4 章の (1.20) である．したがって，

$$\Omega' \cdot G' = A \cdot (\Omega \cdot G) \cdot {}^t A, \tag{4.8}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12}' \\ -\Omega_{12}' & 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ -\Omega_{12} & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^t A$$

が成り立つ．したがって，

$$\Omega_{12}' = (\det A) \cdot \Omega_{12} \tag{4.9}$$

を得る．

(4.7) より

$$\begin{aligned} g' = \det G' &= (\det A)^2 \cdot \det G \\ &= (\det A)^2 \cdot g \end{aligned} \tag{4.10}$$

であり，したがって

$$\frac{\Omega_{12}'}{\sqrt{g'}} = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}} \tag{4.11}$$

が成り立つ．すなわち，$\Omega_{12}/\sqrt{g}$ は局所標構場の向き付けの選び方にはよらない．よって，多様体全体の上での 2 次外微分形式である．ここで M と同じ向きの局所座標系 u^i をとり，その自然基底を $\{e_1, e_2\}$ で表すと，Ω_{12} は

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2}R_{12kl}du^k \wedge du^l = R_{1212}du^1 \wedge du^2$$

とかける．よって，

$$\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}} = \frac{R_{1212}}{g} \cdot \sqrt{g}\,du^1 \wedge du^2 = -K d\sigma \tag{4.12}$$

が成り立つ．ここで，K は M のガウス曲率であり，$d\sigma = \sqrt{g}\,du^1 \wedge du^2$ は M の向き付けられた面素である．さて，ガウス–ボンネの定理は，M 上の外微分形式 $K d\sigma$ の積分に関係する．

$\{e_1, e_2\}$ を多様体 M の向きと合致する直交標構場とすると，$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1$ であるので，

$$K d\sigma = -\Omega_{12} \tag{4.13}$$

が成り立つ．

他方，(1.47) より

$$\Omega_{12} = d\theta_{12} + \theta_1^i \wedge \theta_{2i}$$

であり，θ_i^j は歪対称 (定理 1.3 の後の注意 1 参照) であるので，

$$\Omega_{12} = d\theta_{12} \tag{4.14}$$

が成り立つ．ここで，$\theta_{12} = De_1 \cdot e_2$ とおいた．したがって，(4.13) と (4.14) より

$$K d\sigma = -d\theta_{12} \tag{4.15}$$

を得る．

なお，開集合 $U \subset M$ において多様体 M の向きと合致する滑らかな直交標構場 $\{e_1, e_2\}$ が存在する限り，U 上で接続形式 θ_{12} が存在し，(4.15) が成立するということを指摘しておこう．

向き付けられた 2 次元リーマン多様体では，多様体 M の向きと合致する滑らかな直交標構場は 0 でない接ベクトル場と考えてよい．実際，標構 $\{e_1, e_2\}$ の接ベクトル e_2 は M の向きと合致するように e_1 を 90° 回転することにより

得られる．したがって，M の向きと合致する直交標構 $\{e_1, e_2\}$ は大きさ 1 の接ベクトル場 e_1 と同値である．

接ベクトルが 0 となる点は**特異点**とよばれる．まず，はじめに特異点における接ベクトル場の指数について述べよう．近傍 U においてただ一つの特異点 p をもつ滑らかなベクトル場 X をとろう．すなわち，$q \in U - \{p\}$ であれば，$X_q \neq 0$ である．そのとき，$U - \{p\}$ において M の向きと合致する直交標構場 $\{a_1, a_2\}$ で，

$$a_1 = \frac{X}{|X|} \tag{4.16}$$

が滑らかな単位接ベクトルとなるものが存在する．したがって，$\{e_1, e_2\}$ を U 上の M の向きと合致する直交標構場とすれば，

$$\begin{cases} a_1 = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha, \\ a_2 = -e_1 \sin\alpha + e_2 \cos\alpha \end{cases} \tag{4.17}$$

とかくことができる．ここで，$\alpha = \angle(e_1, a_1)$ は e_1 から a_1 への向き付けの角である．明らかに α は多価関数であるが，各点において α の 2 つの値の差は 2π の整数倍だけ異なる．したがって，標構場とベクトル場の微分可能性より各点の近傍においては連続な分岐をもつ．この分岐から得られる 1 価関数はその近傍で滑らかである．つまり，α の二つの連続な分岐は 2π の整数倍である．ここで，

$$\omega_{12} = Da_1 \cdot a_2 \tag{4.18}$$

とおいて，(4.17), (4.18) および $De_1 \cdot e_2 = \theta_{12}$ より

$$\omega_{12} = d\alpha + \theta_{12} \tag{4.19}$$

を得る．

D は点 p を含み，その境界は滑らかな単純な閉曲線 $C = \partial D$ である単連結な領域とすると，§3–4 の議論より，そこには M から誘導された向きが入る．曲線 C の弧長を $s\,(0 \leq s \leq L)$ とし，s が増加するときに，曲線に沿う向きは C の誘導された向きと同じであると仮定する．よって，$C(0) = C(L)$ であり，C はコンパクトなので，有限開近傍で被覆され，各近傍では α の連続分岐が存在する．したがって，C 上で α は s の連続関数 $\alpha = \alpha(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ と表すことができる．一般的には $\alpha(0) \neq \alpha(L)$ であり，その 2 つの関数の分岐の差は

2π の整数倍の違いである．解析学の基本定理より

$$\alpha(L) - \alpha(0) = \int_0^L d\alpha \tag{4.20}$$

が成り立つ．しかし，$\alpha(L)$ と $\alpha(0)$ は同じ点 $C(0)$ における接ベクトル a_1 と e_1 の角であるので，(4.20) の左辺は 2π の整数となる．さらにそれは，$\alpha(s)$ の連続分岐の選び方によらないし，標構場 $\{e_1, e_2\}$ の選び方にもよらない．

次に，(4.20) の値は点 p のまわりを回る単純閉曲線 C の選び方にもよらないことを示そう．p を含む他の単連結な領域 $D_1 \subset \mathring{D}$ をとり，$C_1 = \partial D_1$ とする．このとき，$D - \mathring{D}_1$ は M で境界をもつ領域となり，その誘導された向きによる境界は $C - C_1$ [3]である．式 (4.19) とストークスの定理より，

$$\begin{aligned}\int_{C-C_1} d\alpha &= \int_{C-C_1} \omega_{12} - \int_{C-C_1} \theta_{12} \\ &= \int_{C-C_1} \omega_{12} - \int_{D-D_1} d\theta_{12} \\ &= \int_{C-C_1} \omega_{12} + \int_{D-D_1} K\, d\sigma \end{aligned} \tag{4.21}$$

が成り立つ．右辺は明らかに $D - D_1$ 上の標構場 $\{e_1, e_2\}$ の選び方によらない．したがって，$e_i = a_i$ $(i = 1, 2)$ としてもよいので，この場合は，$\overline{\alpha} = \angle(e_1, a_1) = 0$ となり，(4.21) はこの場合でも成立している．したがって，

$$\int_{C-C_1} \omega_{12} + \int_{D-D_1} K\, d\sigma = \int_{C-C_1} d\overline{\alpha} = 0$$

が成り立つ．この式を (4.21) に代入すれば

$$\int_{C-C_1} d\alpha = 0, \qquad \int_C d\alpha = \int_{C_1} d\alpha$$

を得る．

定義 4.1　ベクトル X は点 p で孤立した特異点をもつ滑らかな接ベクトルとし，U を点 p の座標近傍とし，p は U において X のただ一つの特異点とする．このとき，次の整数 I_p，すなわち

$$I_p = \frac{1}{2\pi}\left[\alpha(L) - \alpha(0)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_C d\alpha \tag{4.22}$$

3)　位相幾何学における“鎖”という概念を用いる．$C - C_1$ は，C と $(-C_1)$ の和集合である．例えば，Singer and Thorpe 1976 参照．

を点 p における接ベクトル X の**指数**という．これは上記の点 p のまわりの単純閉曲線の選び方によらないし，M の向きと合致する U 上の標構場 $\{e_1, e_2\}$ の選び方にもよらない．

直観的には，指数 I_p は，接ベクトル X が特異点 p のまわりの回転する数を表す．

C 上で (4.19) を積分すると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \omega_{12} = \frac{1}{2\pi}\int_C d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_D K\,d\sigma$$

が成立する．点 p でガウス曲率 K は連続であり，領域 D が 1 点に収縮すれば，その積分は

$$\frac{1}{2\pi}\int_D K\,d\sigma \longrightarrow 0$$

となる．一方，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C d\alpha$ は定数 I_p であるので，

$$I_p = \frac{1}{2\pi}\lim_{C\to p}\int_C \omega_{12} \tag{4.23}$$

が成り立つ．

定理 4.1 (**ガウス–ボンネの定理**) M をコンパクト向き付けられた 2 次元リーマン多様体とすれば，

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,d\sigma = \chi(M) \tag{4.24}$$

が成り立つ．ここで，$\chi(M)$ は M の**オイラー特性類**である．

証明　有限個の孤立特異点 p_i $(1 \leq i \leq r)$ をもつ滑らかな接ベクトル場 X をとり，各点 p_i に ϵ 球近傍 D_i をとる．ただし，各 D_i は p_i 以外には特異点を含まないように十分小さく ϵ をとる．$C_i = \partial D_i$ とすると，C_i は D_i 上での M から誘導された向きをもつ単純閉曲線である．したがって，接ベクトル場 X は $M - \bigcup_i D_i$ 上で滑らかな直交標構場 $\{e_1, e_2\}$ を決める．ただし，$e_1 = X/|X|$ であり，M の向きに合致する向き付けられた標構とする．ここで，

$$\theta_{12} = De_1 \cdot e_2 \tag{4.25}$$

とかくと，(4.15) より，$M - \bigcup_i D_i$ 上で

$$d\theta_{12} = \Omega_{12} = -K d\sigma$$

が成り立つ．

さらに，ストークスの定理より，

$$\int_{M-\bigcup_i D_i} K\,d\sigma = -\int_{M-\bigcup_i D_i} d\theta_{12}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial D_i} \theta_{12}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \int_{C_i} \theta_{12} \tag{4.26}$$

である．

ここで，$M - \bigcup_{1\le i\le r} D_i$ の境界は，$\bigcup_{1\le i\le r} D_i$ の境界と等しいことが集合論よりわかるが，前者は，その境界において誘導された向きと同じであり，$\sum_i \partial D_i = \sum_i C_i$ の向きとは完全に逆向きである．第 2 式の等号にこの事実を用いた．

直交標構場 $\{e_1, e_2\}$ は $M - \bigcup_i \{p_i\}$ で正しく定義されるので，方程式 (4.26) は $\epsilon \to 0$ の場合でも成立する．K は M 上で定義される連続な微分可能関数であるので，

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{M-\bigcup_i D_i} K\,d\sigma = \int_M K\,d\sigma$$

が成り立ち，(4.26) の最後の項は $\epsilon \to 0$ の場合，ちょうど $2\pi \sum_{i=1}^{r} I_{p_i}$ である ((4.23) 参照)．したがって，

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,d\sigma = \sum_{i=1}^{r} I_{p_i} \tag{4.27}$$

が成り立つ．

上記の式の左辺は接ベクトル X によらない．M 上の特別な接ベクトル場を次のように構成しよう．M を三角形分割する (多様体 M はコンパクトであるので，三角形分割可能である．Singer and Thorpe 1976 を参照)．各次元の各面の重心が特異点である滑らかな接ベクトル X をとると，その指数の値は 2 次元の面の重心，1 次元の重心，頂点においてそれぞれ $+1$, -1, $+1$ である (図 11 参照)．したがって，

$$\sum I_{p_i} = f - e + v = \chi(M) \tag{4.28}$$

が成り立つ．ここで，f, e, v は M の三角形分割の面の数，辺の数，頂点の数を表す．したがって，

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,d\sigma = \chi(M)$$

が成り立つ．　□

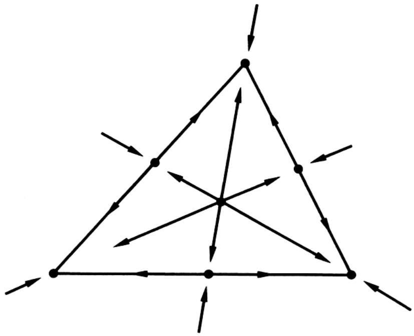


図 11

上記の証明より**ホップの指数定理**も示されたことになる．すなわち，

系　有限個の特異点をもつコンパクトで向き付けられた2次元リーマン多様体においては，すべての特異点の指数の和は多様体のオイラー特性類と等しい．

注意. 上記の系より，コンパクトで向き付けられた2次元リーマン多様体が0ではない滑らかな接ベクトル場をもつための必要条件は，そのオイラー特性類が0となることである．逆に，2次元多様体の分類より，コンパクトな向き付けられた滑らかな2次元多様体のオイラー特性類が0であれば，それは，トーラスと位相同形である．その結果，トーラス上には0となる滑らかな接ベクトル場は存在しない．

ガウス–ボンネの定理は，境界をもつ領域へ一般化できる．C を多様体 M の滑らかな曲線とし，a_1 を C の単位接ベクトルとする．C の単位法線ベクトル a_2 を $\{a_1, a_2\}$ が M の向きと合致するように選ぶ．Da_1 は a_2 と共線方向であるので，

$$\kappa_g = \frac{Da_1}{ds} \cdot a_2 \tag{4.29}$$

とおいてもよい．ここで，κ_g は C の**測地曲率**といわれる．明らかに，C が測地線であるための必要十分条件は，

$$\kappa_g \equiv 0$$

である．

D を向き付けられた2次元リーマン多様体の境界をもつコンパクトな領域とし，その境界 ∂D は D から誘導された向きをもつ有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線からなるとする．各頂点 p_i における ∂D の内角を α_i $(1 \leq i \leq l)$

とすると，ガウス–ボンネの定理 (S. S. Chern 1967(a) 参照) は

$$\sum_{i=1}^{l}(\pi-\alpha_i)+\int_{\partial D}\kappa_g ds+\iint_D K\,d\sigma=2\pi\chi(D) \tag{4.30}$$

で与えられる．ここで，κ_g は ∂D に沿う測地曲率で，$\chi(D)$ は D のオイラー特性類である．

D が M の測地三角形で，∂D が三つの測地線の線分からなる閉曲線であれば，$\chi(D)=1$ であるので，(4.30) は

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi=\iint_D K\,d\sigma \tag{4.31}$$

となる．これは，「平面三角形の内角の和は 180° である」という定理の一般化となっている．球面の場合，(4.31) は Gauss によって得られている．

ガウス–ボンネの定理を詳細に分析すると，その鍵は M 上の 2 次外微分形式 $K\,d\sigma$ を $-d\theta_{12}$ で表すことにあることを見いだすのは難しいことではない．ここで，後者は M の標構束，つまり M の球束 (M の単位接ベクトルからつくられるファイバー束) 上の対象とみなせる．したがって，M 上の積分は球束の切断の上の積分に変換される．しかし，球束の切断すなわち単位接ベクトル場は存在しないかもしれない．したがって，ストークスの定理より，その積分は特異点のまわりの積分となる．その結果，特異点におけるベクトル場の指数が必要となるのである．このアイデアは，高次元多様体におけるガウス–ボンネの定理にもそのまま適用される．

M をコンパクトで向き付けられた $2n$ 次元リーマン多様体とする．M の局所直交標構が $\{e_i,\ 1\le i\le 2n\}$ で，その直交余標構を $\{\theta_i,\ 1\le i\le 2n\}$ で表し，接続形式と曲率形式をそれぞれ ω_{ij} と Ω_{ij} とする．$2n$ 次外微分形式

$$\Omega=(-1)^n\frac{1}{2^{2n}\pi^n n!}\delta^{i_1\cdots i_{2n}}_{1\cdots 2n}\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2n-1}i_{2n}} \tag{4.32}$$

をとると，Ω は局所直交標構の選び方によらない．したがって，Ω は M 上で大域的に定義された $2n$ 次外微分形式である．ここで Ω は

$$\Omega=K\,d\sigma \tag{4.33}$$

と表せる．ただし，$d\sigma=\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{2n}$ は M の体積要素であり，K は M の**リプシッツ–キリング曲率**であり，

$$K=\frac{1}{2^{2n}(2\pi)^n n!}\delta^{i_1\cdots i_{2n}}_{j_1\cdots j_{2n}}R_{i_1i_2j_1j_2}\cdots R_{i_{2n-1}i_{2n}j_{2n-1}j_{2n}} \tag{4.34}$$

とかける.

ガウス–ボンネの定理は

$$\int_M K\,d\sigma = \chi(M) \tag{4.35}$$

とかくことができる. この定理を証明する鍵は M の球束 (M の単位接ベクトルよりつくられるファイバー束) の外微分形式 Ω を $(2n-1)$ 次外微分形式 Π の外微分として表すことにある. すなわち,

$$\Omega = d\Pi \tag{4.36}$$

である.

一般に, M の外微分形式が束 $\pi : E \longrightarrow M$ で引き戻されるとき, $\pi^*\Omega$ は完全形になる. このことは**転入**とよばれ, 非常に重要である. 詳しくは, S. S. Chern 1944(b) を参照されたい.

6

リー群・動標構

§6-1　リー群

実数体にはさまざまな構造が存在する．例えば，加法，減法，乗法，除法といった演算を含む代数的な構造がある．一方，それは連続性や可微分性という位相構造または可微分構造をもっている．本節で述べるリー群の理論は，群と可微分構造の両方が結びついたものである．ただし，ここでの議論は，リー群やリー代数の理論の基礎に限ることにする．

定義 1.1　G を空でない集合としよう．このとき，条件

1) G は群であり (その演算を乗法とする),
2) G は滑らかな r 次元多様体,
3) $\tau(g) = g^{-1}$ である逆写像 $\tau : G \longrightarrow G$ と，$\varphi(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$ である乗法写像 $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ は，それぞれ滑らかな写像である,

がみたされるとき，G は r 次元**リー群**とよばれる．

なお，$\tau^2 = \mathrm{id} : G \longrightarrow G$ となる．すなわち $\tau^2(g) = g$ なので，τ は G から G への微分同相である．さらに，G は次の二つの微分同相写像をもつ．任意の $g \in G$ に対して，写像 $R_g : G \longrightarrow G$ を

$$R_g(x) = \varphi(x, g) = x \cdot g \tag{1.1}$$

とおき，g の**右移動**とよぶ．また，写像 $L_g : G \longrightarrow G$ を

$$L_g(x) = \varphi(g, x) = g \cdot x \tag{1.2}$$

とおき，g の**左移動**とよぶ．

写像 L_g，R_g はそれぞれ可逆写像なので，それらは G から G への微分同相

でもある.

例 1. ベクトルの加法に関して $\mathbb{R}^n$ は n 次元リー群となる.

例 2 (n **次元トーラス群** $\mathbb{T}^n$). $\mathbb{R}^n$ に n 個の 1 次独立なベクトルを選ぶと, これらの張る束

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}^n \tag{1.3}$$

は加法に関して群となり, $\mathbb{R}^n$ の部分群である. トーラス群 $\mathbb{T}^n$ は商群 $\mathbb{R}^n/L$ であるので, 位相幾何学的に n 次元コンパクトリー群であることがわかる.

二つのリー群 G_1, G_2 に対して積多様体 $G_1 \times G_2$ 上の作用を次のように定義する. $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ に対して,

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \tag{1.4}$$

とする. このとき, $G_1 \times G_2$ は積 (1.4) に関するリー群となり, リー群 G_1, G_2 の**直積**とよぶ.

自然に 1 次元トーラス $\mathbb{T}^1$ は円 $S^1 = \{e^{i2\pi t}\}_{t\in\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$ とみなすことができるので, n 次元トーラスは n 個の円の直積

$$\mathbb{T}^n \cong S^1 \times \cdots \times S^1 \ (n\ 個) \tag{1.5}$$

とかける.

例 3 (**一般線形群** $\boldsymbol{GL}(n;\mathbb{R})$, $\boldsymbol{GL}(n;\mathbb{C})$). $GL(n;\mathbb{R})$ は非退化 $n \times n$ 型実行列の集合であり, 行列の積に関して群となる. $GL(n;\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の開集合なので, $\mathbb{R}^{n^2}$ から誘導される可微分構造をもつ. ここで,

$$A = \left(A_i^j\right), \quad B = \left(B_i^j\right) \in GL(n;\mathbb{R})$$

に対して,

$$(A \cdot B)_i^j = \sum_{k=1}^{n} A_i^k B_k^j \tag{1.6}$$

となる. 上式の右辺は行列 A, B の元の多項式なので, 写像

$$\varphi(A, B) = A \cdot B \tag{1.7}$$

は滑らかである. さらに, 逆行列 A^{-1} の元は A_i^j の有理式なので, 逆写像も滑らかであり, $GL(n;\mathbb{R})$ はリー群である.

同様に，非退化 $n \times n$ 型複素数行列の乗法群 $GL(n;\mathbb{C})$ は $2n^2$ 次元リー群である．

例 4. $GL(1;\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}^*$ ともかく) は，0 でない複素数の乗法群である．位相的に $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ と一致し，その元 $x + iy$ の座標を (x, y) とする．このとき，$\mathbb{C}^*$ は 2 次元可微分多様体となる．

ここで，$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ $(\alpha = 1, 2;\ z_\alpha \neq 0)$ に対して，座標を用いて $z_1 \times z_2$ を表すと

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.8}$$

となり，$z = x + iy$ の逆元は

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \tag{1.9}$$

である．明らかに，乗法と逆写像はともに滑らかなので，C^* は 2 次元リー群である．

例 5. G をリー群で，H を G の部分群とする．H が G の正則部分多様体ならば，定義 1.1 の写像の制限，すなわち

$$\psi|_{H\times H} : H \times H \longrightarrow H \subset G,$$
$$\tau|_H : H \longrightarrow H \subset G$$

は滑らかである (Boothby 1975，p.83 を参照)．ここで，

$$SL(n;\mathbb{R}) = \{A \in GL(n;\mathbb{R}) \,|\, \det A = 1\},$$
$$O(n;\mathbb{R}) = \{A \in GL(n;\mathbb{R}) \,|A \cdot {}^tA = I\}$$

とすると，$SL(n;\mathbb{R})$, $O(n;\mathbb{R})$ は部分群となり，さらに，$GL(n;\mathbb{R})$ の正則部分多様体なので，リー群である．これらを，それぞれ**特殊線形群**と**実直交群**という．ここで，I は単位行列なので，$GL(n;\mathbb{R})$ の単位元である．

G を単位元 e をもつ r 次元リー群とする．任意の $a \in G$ に対して $R_{a^{-1}}$ は G から G への微分同相写像であり，$R_{a^{-1}}(a) = e$ なので接写像 $(R_{a^{-1}})_* : G_a \longrightarrow G_e$ は線形同形写像である．ここで G_a は a における G の接空間を表す．$X \in G_a$ に対して，

$$\omega(X) = (R_{a^{-1}})_* X \tag{1.10}$$

とおくと，ω は G から G_e への微分 1 次形式となる．これは，リー群 G の**右基本微分形式**，または**マウレル–カルタン形式**という．G_e の基底 $\delta_i\,(1 \leq i \leq r)$ を選ぶと

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega^i \delta_i \tag{1.11}$$

とかける．ここで，$\omega^i\,(1 \leq i \leq r)$ は，いたるところ 1 次独立な r 個の G 上の 1 次微分形式である．

では，座標を用いて ω^i を計算しよう．点 e, a における局所座標系をそれぞれ $(U; x^i), (W; y^i)$ とする．このとき，$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は連続関数なので，十分小さい U に対して，$\varphi(U \times W_1) \subset W$ となるような a における近傍 $W_1 \subset W$ が存在する．そこで，$\delta_i = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$ と選び，

$$\varphi^i(x, y) = y^i \circ \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in U \times W_1$$

とすると，線形同形写像 $(R_a)_* : G_e \longrightarrow G_a$ は

$$(R_a)_* \delta_i = \sum_{j=1}^{r} \left(\left.\frac{\partial \varphi^j(x, a)}{\partial x^i}\right|_{x=e} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_a \right) \tag{1.12}$$

となる．

$$(R_{a^{-1}})_* \circ (R_a)_* = \text{ id } : G_e \longrightarrow G_e$$

なので，

$$(R_{a^{-1}})_* \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_a = \sum_{j=1}^{r} \Lambda_i^j(a) \delta_j$$

である．ここで，$(\Lambda_i^j(a))$ は $\left(\left.\dfrac{\partial \varphi^i(x, a)}{\partial x^j}\right|_{x=e} \right)$ の逆行列である．したがって，

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{r} \Lambda_j^i(a) dy^j \tag{1.13}$$

となり，ω^i は滑らかな 1 次微分形式であることがわかる．

定理 1.1 滑らかな写像 $\sigma : G \longrightarrow G$ に対して，σ がリー群 G の右移動となるための必要十分条件は，右基本微分形式が保存されることである．すなわち，

$$\sigma^* \omega^i = \omega^i, \qquad 1 \leq i \leq r$$

となることである．

証明　σ を右移動 $R_x\,(x \in G)$ としよう．このとき，任意の $X \in G_a$ に対して，

$$\begin{aligned}(R_x)^*\omega(X) &= \omega((R_x)_*X)\\ &= (R_{(ax)^{-1}})_* \circ (R_x)_*X\\ &= (R_{a^{-1}})_*X\\ &= \omega(X)\end{aligned}$$

である．すなわち

$$(R_x)^*\omega = \omega \tag{1.14}$$

となる．

逆に，σ は右基本微分形式を保存しているとしよう．このとき，次のパッフ連立方程式

$$\omega^i(a) = \omega^i(b), \quad (a,b) \in G \times G, \quad 1 \leq i \leq r \tag{1.15}$$

より，多様体 $G \times G$ 上の r 次元平面分布が決まるので，その r 次元積分多様体は一意に決まる．さらに，写像 $\sigma : G \longrightarrow G$ は右基本微分形式を保存するので，任意の $X \in G_a$, $\sigma_*X \in G_{\sigma(a)}$ に対して，

$$\omega^i(X) = \omega^i(\sigma_*X)$$

となる．したがって，σ より $(e, \sigma(e))$ を通る (1.15) の r 次元積分多様体が決まることがわかる．一方，右移動 $R_{\sigma(e)}$ より同じ初期条件をみたす r 次元積分多様体が決まるので，解の一意性より

$$\sigma = R_{\sigma(e)}$$

となる．　□

$d \circ \sigma^* = \sigma^* \circ d$ (第 3 章の定理 2.6) より，$d\omega^i$ も右移動に関して不変微分形式である．したがって，次のようにかける．

$$\begin{cases} d\omega^i = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \\ c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

ここで ω^i，$d\omega^i$ はそれぞれ右不変なので，c^i_{jk} は定数であり，リー群 G の**構造定数**とよばれる．方程式 (1.16) はリー群 G の**構造方程式**または**マウレル–カルタン方程式**とよばれる．

定理 1.2　構造定数 c^i_{jk} はヤコビの恒等式

$$\sum_{j=1}^{r}(c^i_{jk}c^j_{hl} + c^i_{jh}c^j_{lk} + c^i_{jl}c^j_{kh}) = 0 \tag{1.17}$$

をみたす.

証明 (1.16) を外微分すると,

$$0 = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} c^i_{jk}(d\omega^j \wedge \omega^k - \omega^j \wedge d\omega^k)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k,h,l} c^i_{jk}c^j_{hl}\omega^k \wedge \omega^h \wedge \omega^l$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k,h,l=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\left(c^i_{jk}c^j_{hl} + c^i_{jh}c^j_{lk} + c^i_{jl}c^j_{kh}\right)\omega^k \wedge \omega^h \wedge \omega^l$$

となり, 括弧を含む項は k, h, l に関して歪対称なので, (1.17) が成り立つ. □

注意. 構造定数が重要なのは局所リー群の構造を決めるからである. 局所リー群 V というのは, 任意の $e \in V$ に対して, 下記の条件 1), 2) をみたす $(e,e) \in V \times V$ の近傍 W から V への滑らかな写像 $(x,y) \longmapsto x \cdot y$ が存在するような可微分多様体 V である.

1) $(e,y) \in W$ に対して $e \cdot y = y$ となり, $(x,e) \in W$ に対して $x \cdot e = x$ となる,

2) $(x,y), (y,z), (x \cdot y, z), (x, y \cdot z) \in W$ に対して $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ となる.

元 e は局所リー群の単位元とよばれる.

局所リー群とリー群との違いは, 前者では, 乗法が単位元の近傍でしか定義されないことである. もちろん, リー群は局所リー群である. 上記と同様に, 局所リー群にもマウレル–カルタン形式と構造定数が導入できる. ここで次の定理が成り立つ.

「r^3 個の定数 c^i_{jk} が, 条件

$$\begin{cases} c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\left(c^i_{jk}c^j_{hl} + c^i_{jh}c^j_{lk} + c^i_{jl}c^j_{kh}\right) = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

をみたすならば, 構造定数 c^i_{jk} をもつ r 次元局所リー群 V が存在する. さらに, このような二つの局所リー群は同形である (Chevalley 1946 を参照).」

定義 1.2 X をリー群 G 上の滑らかな接ベクトルとしよう. このとき, 任意の $a \in G$ に対して

$$(R_a)_* X = X \tag{1.19}$$

が成り立てば, ベクトル X は G 上の**右不変ベクトル場**という.

任意にとられた接ベクトル $X_e \in G_e$ に対して

$$X_a = (R_a)_* X_e \tag{1.20}$$

とおくと，G 上の滑らかな接ベクトル場 X が得られる．明らかに，X における右基本微分形式 ω の値は一定である．すなわち

$$\omega(X) = X_e \tag{1.21}$$

となる．定理 1.1 より

$$\omega(X) = (R_a)^* \omega(X) = \omega((R_a)_* X)$$

となる．したがって，

$$(R_a)_* X = X$$

である，すなわち (1.20) の接ベクトルは右不変である．

$\delta_i \in G_e$ の右移動より得られる右不変接ベクトル場 X_i に対して，X_i $(1 \leq i \leq r)$ は G 上のいたるところで 1 次独立な接ベクトル場となる．さらに，G 上の任意の右不変接ベクトル場は X_i の定数係数の 1 次結合としてかける．したがって，G 上の右不変接ベクトル場の全体 $\mathcal{G}$ は r 次元ベクトル空間となり，さらに，$\mathcal{G}$ は G_e に同形である．

(1.21) より，

$$\omega(X_i) = \delta_i$$

となる．すなわち

$$\omega^i(X_j) = \langle X_j\, , \omega^i \rangle = \delta^i_j \tag{1.22}$$

が成り立つので，基本微分形式 ω^i $(1 \leq i \leq r)$ と右不変ベクトル場 X_j $(1 \leq j \leq r)$ はリー群 G 上の互いに双対な余標構場と標構場となる．よって，G 上の接ベクトル場 X が右不変となるための必要十分条件は，X における右基本微分形式の値が定数であることである．

定理 1.3　G 上の右不変ベクトル場 X, Y に対して，$[X\, , Y]$ は G 上の右不変ベクトル場である．

証明　第 3 章の定理 2.3 より，

$$\left\langle X \wedge Y\, , d\omega^i \right\rangle = X \left\langle Y\, , \omega^i \right\rangle - Y \left\langle X\, , \omega^i \right\rangle - \left\langle [X\, , Y]\, , \omega^i \right\rangle \tag{1.23}$$

となる．一方，構造方程式 (1.16) より

$$\left\langle X \wedge Y\,,\, d\omega^i \right\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\left\langle X \wedge Y\,,\, \omega^j \wedge \omega^k \right\rangle$$

$$= -\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\omega^j(X)\omega^k(Y)$$

が成り立つ．ここで，X, Y は右不変ベクトル場なので，

$$\omega^i(X) = \text{定数}, \qquad \omega^i(Y) = \text{定数}$$

となる．したがって，(1.23) より

$$\omega^i([X\,,\,Y]) = \sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\omega^j(X)\omega^k(Y) = \text{定数} \tag{1.24}$$

となる．すなわち $[X\,,\,Y]$ は右不変である． □

この定理 1.3 は，滑らかな接ベクトルのポアソン括弧積が $\mathcal{G}$ で閉じていることを示している．よって，ポアソン括弧積は，次の条件をみたす $\mathcal{G}$ 上の乗法となる．

1) 分配法則

$$[a_1X_1 + a_2X_2\,,\,Y] = a_1\,[X_1\,,\,Y] + a_2\,[X_2\,,\,Y]\,,$$

2) 歪対称法則

$$[X\,,\,Y] = -\,[Y\,,\,X]\,,$$

3) ヤコビの恒等式

$$[X\,,\,[Y\,,\,Z]] + [Y\,,\,[Z\,,\,X]] + [Z\,,\,[X\,,\,Y]] = 0.$$

上記の分配法則，歪対称法則，ヤコビの恒等式をみたすような乗法をもつ n 次元実ベクトル空間を**リー代数**という．例えば，3 次元ユークリッド空間はベクトルの外積に関して 3 次元リー代数となる．また，多様体 M 上の滑らかな接ベクトル場の全体は，ポアソン括弧積に関して無限次元のリー代数である．したがって，定理 1.3 より，リー群 G 上の右不変ベクトル場の全体 $\mathcal{G}$ は r 次元リー代数となる．このリー代数 $\mathcal{G}$ をリー群 G の**リー代数**という．

リー群の構造定数から，そのリー代数 $\mathcal{G}$ の括弧積がその定数を掛けた積として得られる．すなわち，(1.24) より

$$\omega^i([X_j\,,\,X_k]) = c^i_{jk}$$

となるので，

$$[X_j\,,\,X_k]=\sum_{i=1}^{r}c^i_{jk}X_i \tag{1.25}$$

が成り立つ．構造定数 c^i_{jk} の下付添字に関する歪対称性とこの構造定数がみたしているヤコビの恒等式は，括弧積の歪対称性とそのヤコビの恒等式に対応している．したがって，

$$[\delta_j\,,\,\delta_k]=\sum_{i=1}^{r}c^i_{jk}\delta_i \tag{1.26}$$

とおくと，G_e は r 次元リー代数となり，G_e と $\mathcal{G}$ はリー代数として同形になる．(1.26) の乗法に関するリー代数 G_e もリー群 G の**リー代数**という．

注意．上記と同様に，リー群 G の左基本微分形式 $\widetilde{\omega}$ と左不変ベクトル場を導入できる．ここで，

$$\widetilde{\omega}=\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\omega}^i\delta_i \tag{1.27}$$

とおき，$\widetilde{X}_i$ を左移動で生成された δ_i の左不変ベクトル場とすると，

$$\widetilde{\omega}^i(\widetilde{X}_j)=\left\langle \widetilde{X}_j\,,\,\widetilde{\omega}^i\right\rangle=\delta^i_j \tag{1.28}$$

が成り立つ．構造方程式を

$$d\widetilde{\omega}^i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}\widetilde{c}^i_{jk}\widetilde{\omega}^j\wedge\widetilde{\omega}^k, \tag{1.29}$$

または，

$$\left[\widetilde{X}_j\,,\,\widetilde{X}_k\right]=\sum_{i=1}^{r}\widetilde{c}^i_{jk}\widetilde{X}_i \tag{1.30}$$

とすると，簡単な計算により $\widetilde{c}^i_{jk}$ と $-c^i_{jk}$ の差は符号のみであることがわかる．つまり，

$$\widetilde{c}^i_{jk}=-c^i_{jk} \tag{1.31}$$

が得られる (このことの証明は読者にまかせる)．

右不変ベクトル場の括弧積と左不変ベクトル場の括弧積により，それぞれ $[\,,\,]_{\mathrm{left}}$ と $[\,,\,]_{\mathrm{right}}$ と表す二つの乗法演算を G_e 上に定義する．すなわち，

$$\begin{cases}[\delta_i\,,\,\delta_j]_{\mathrm{right}}=[X_i\,,\,X_j]_e\,, \\ [\delta_i\,,\,\delta_j]_{\mathrm{left}}=[\widetilde{X}_i\,,\,\widetilde{X}_j]_e.\end{cases} \tag{1.32}$$

(1.31) より

$$[\delta_i\,,\,\delta_j]_{\mathrm{right}}=-[\delta_i\,,\,\delta_j]_{\mathrm{left}} \tag{1.33}$$

が得られる．なお，本書では，G のリー代数として G_e を用いるとき，(1.26) の乗法，すなわち $[\,,\,]_{\mathrm{right}}$ を用いることとする．

例 6. 一般線形群 $GL(n;\mathbb{R})$ の構造定数の計算.

$GL(n;\mathbb{R})$ の元は $n \times n$ 型の非退化実行列である．任意の $A = (A_i^j) \in GL(n;\mathbb{R})$ に対して，(A_i^j) $(1 \leq i, j \leq n)$ は多様体 $GL(n;\mathbb{R})$ 上の座標系となり，dA_i^j $(1 \leq i, j \leq n)$ は $GL(n;\mathbb{R})$ 上の余標構場となる．ここで，$dA = (dA_i^j)$ は A における $GL(n;\mathbb{R})$ 上の任意の接ベクトルである．したがって，$GL(n;\mathbb{R})$ 上の右基本微分形式は，(1.13) より

$$\omega = dA \cdot A^{-1} \tag{1.34}$$

である．(1.34) を外微分すると，

$$d\omega = -dA \wedge dA^{-1} = \omega \wedge \omega \tag{1.35}$$

が得られる．

リー群 $GL(n;\mathbb{R})$ の単位元 I，すなわち単位行列における接空間を $gl(n;\mathbb{R})$ とおくと，これは n^2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ であり，その元は $n \times n$ 型の実行列である．この表現では，$gl(n;\mathbb{R})$ は基底 E_i^j $(1 \leq i, j \leq n)$ をもつ．ここで，E_i^j は (j, i) 成分が 1 で，その他の成分がすべて 0 となるような $n \times n$ 型行列である．したがって，

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i^j E_j^i = (\omega_i^j) \tag{1.36}$$

が成り立ち，(1.35) より

$$\begin{aligned} d\omega_i^j &= \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s=1}^{n} (\delta_i^p \delta_q^j \delta_s^r - \delta_i^r \delta_s^j \delta_q^p) \omega_p^s \wedge \omega_r^q \end{aligned}$$

となる．したがって，リー群 $GL(n;\mathbb{R})$ の構造定数は

$$c_{(p,s)(r,q)}^{(i,j)} = -\delta_i^p \delta_q^j \delta_s^r + \delta_i^r \delta_s^j \delta_q^p \tag{1.37}$$

となり，リー代数 $gl(n;\mathbb{R})$ の括弧積は

$$\left[E_s^p\,,\, E_q^r\right] = \delta_q^p E_s^r - \delta_s^r E_q^p \tag{1.38}$$

となる．

$A, B \in gl(n; \mathbb{R})$ を成分

$$A = (A_p^s) = \sum_{p,s=1}^{n} A_p^s E_s^p, \qquad B = (B_r^q) = \sum_{r,q=1}^{n} B_r^q E_q^r$$

でかくと，(1.38) より

$$[A\,,\,B] = B \cdot A - A \cdot B \tag{1.39}$$

が成り立つ.

定義 1.3　G, H を 2 つのリー群とする．このとき，群の間の準同形写像となる滑らかな関数 $f : H \longrightarrow G$ が存在すれば，f を H から G へのリー群の**準同形写像**という．さらに，f は微分同相形写像であれば，H から G へのリー群の**同形写像**という．

定理 1.4　リー群の準同形写像 $f : H \longrightarrow G$ は，リー代数間の準同形写像 $f_* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ を誘導する．f がリー群の同形写像ならば，f_* はリー代数の同形写像である．

証明　滑らかな関数 f の微分写像を f_* としよう．まず，f_* はリー群 H 上の右不変ベクトル場をリー群 G 上の右不変ベクトル場に写像することを示そう．任意の $X_e \in H_e$ に対して，

$$Y_{\overline{e}} = f_* X_e \in G_{\overline{e}}$$

とおこう．ここで e は H の単位元で，$\overline{e} = f(e)$ は G の単位元である．$X_e, Y_{\overline{e}}$ で生成された右不変ベクトル場をそれぞれ X, Y としよう．このとき，任意の $a \in H$ に対して，

$$\begin{aligned} f_* X_a &= f_* \circ (R_a)_* X_e \\ &= (R_{\overline{a}})_* \circ f_* X_e \\ &= Y_{\overline{a}} \end{aligned}$$

となる．ここで $\overline{a} = f(a)$ である．したがって，H 上の右不変ベクトル場の f_* による像を G 上の右不変ベクトル場に拡張できる．この対応を $f_* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ で表す．

さらに，接写像 f_* はポアソン括弧積と可換である．すなわち，

$$f_* \left[X_1\,,\,X_2\right]_a = \left[Y_1\,,\,Y_2\right]_{\overline{a}}, \qquad a \in H$$

となる．ここで Y_i は $f_* X_i$ より拡張された G 上の右不変ベクトル場である．したがって，$f_* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ はリー代数間の準同形写像である．

f がリー群の同形写像ならば，f_* は可逆関数である．したがって，$f_* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ はリー代数間の同形写像となる．　□

定義 1.4 H, G をリー群としよう．このとき，条件

1) H は G の部分群であり，

2) 写像 $id : H \longrightarrow G$ は多様体の埋め込みである，

をみたすとき，H を G の**リー部分群**という．

例 5 によると，H がリー群 G の正則部分多様体で，H が G の部分群ならば，H はリー群となる．すなわち G のリー部分群となる．例えば，$SL(n;\mathbb{R})$ と $O(n;\mathbb{R})$ はともに $GL(n;\mathbb{R})$ のリー部分群である．しかし，一般的には，リー群 G の任意の部分群 H は G の正則部分多様体ではない．

例 7. $G = \mathbb{T}^2$ としよう．任意の無理数 α に対して

$$H = \{(t, \alpha t), t \in \mathbb{R}\}/L$$

とおこう．ここで，$L = \{(n_1, n_2), n_i \in \mathbb{Z}\}$ である．このとき，H は G のリー部分群であるが，G の正則部分多様体ではない．

定理 1.4 より，埋め込み $\mathrm{id} : H \longrightarrow G$ はリー群の準同形写像なので，リー代数 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{G}$ への準同形写像を誘導する．H_e は G_e の部分空間なので，H_e に制限された G_e 上の乗法 (1.26) は閉じている．

一般線形群は，例 6 で計算された構造をもつ典型的なリー群である．したがって，つねにリー群を一般線形群を通して考えればよいということになる．任意のリー群 G から $GL(n;\mathbb{R})$ への準同形写像をリー群の n **次表現**という．以下に示すように，各 r 次元リー群は r 次の表現 (随伴表現) をもつ．

任意の $x \in G$ に対して

$$\alpha_x(g) = xgx^{-1} = L_x \circ R_{x^{-1}}(g) \tag{1.40}$$

とすると，α_x は G の**内部自己同形**というリー群 G の自己同形である．定理 1.4 より，α_x の接写像 $(\alpha_x)_*$ はリー代数 G_e の内部自己同形写像を誘導する．ここで

$$\mathrm{Ad}\,(x) = (\alpha_x)_* : G_e \longrightarrow G_e \tag{1.41}$$

とおくと，$\mathrm{Ad}\,(x)$ は線形空間 G_e 上の非退化線形写像となり，$GL(r;\mathbb{R})$ の元でもある．よって，写像

$$\mathrm{Ad}\, : G \longrightarrow GL(r;\mathbb{R})$$

が得られる．

明らかに，任意の $x, y \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\,(x \cdot y) &= (\alpha_{(x \cdot y)})_* \\ &= (\alpha_x \circ \alpha_y)_* \\ &= \mathrm{Ad}\,(x) \circ \mathrm{Ad}\,(y) \end{aligned}$$

となるので，Ad は群の間の準同形写像となる．局所座標を用いると，Ad は局所座標関数でかけるので，$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL\,(r; \mathbb{R})$ はリー群の準同形写像となる．

定義 1.5　(1.41) によるリー群の準同形写像はリー群 G の**随伴表現**とよばれる．

定理 1.4 より，随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL\,(r; \mathbb{R})$ の接写像はリー代数 G_e から $gl\,(r; \mathbb{R})$ への準同形写像を誘導する．これをリー群 G のリー代数 G_e の**随伴表現**という．したがって，$gl\,(r; \mathbb{R})$ は G_e からそれ自身への線形写像の集合とみなすことができる．任意の $X \in G_e$ に対して，$\mathrm{ad}\,(X)$ は G_e 上の線形写像である．次節で

$$\mathrm{ad}\,(X) \cdot Y = -\,[X\,,\,Y] \tag{1.42}$$

を証明する．

§6-2　リー変換群

幾何学では，変換群が重要な役割を果たしている．Klein によると，幾何学は特定の変換群の作用に関して不変である図形の性質を研究している分野である．さまざまな変換群を考えることによって，いくつかの幾何学が生まれてくる．例えば，ユークリッド幾何学，アファイン幾何学，または射影幾何学等がある．多様体へのリー群の作用，すなわちリー変換群の作用はこれらの古典的な変換群の一般化であり，その研究は現代微分幾何学に大きな影響を及ぼした．

定義 2.1　M を m 次元可微分多様体としよう．このとき，条件

1)　$\varphi_0(p) = p$,

2)　任意の実数 s, t に対して $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$,

をみたすような滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$, すなわち, 任意の $(t,p)\in\mathbb{R}\times M$ に対して,

$$\varphi_t(p) = \varphi(t,p)$$

が存在すれば，$\mathbb{R}$ は (左から) **滑らかに多様体 M に作用する**といい，φ_t を M の**微分同相写像の 1 パラメーター群**という．

明らかに $\varphi_t : M \longrightarrow M$ は滑らかな関数であり，上記の条件より $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ が得られるので，各 φ_t は可逆関数であることがわかる．したがって，φ_t は M から M 自身への微分同相写像である．任意の $p\in M$ に対して，

$$\gamma_p(t) = \varphi_t(p) \tag{2.1}$$

とおくと，γ_p は p を通る M 上のパラメーター付き曲線であり，p を通る φ_t の**軌道**とよばれる．

点 p (つまり $t=0$) における軌道 γ_p の接ベクトルを X_p とすれば，M 上の接ベクトル場が得られ，これを微分同相写像の 1 パラメーター群から M 上に**誘導された接ベクトル場**という．明らかに X は滑らかである．というのは，任意の M 上の可微分関数 f に対して

$$\begin{aligned}(Xf)(p) &= X_p f\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\gamma_p(t)) - f(p)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi(t,p)) - f(p)}{t}\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つので，Xf は M 上の滑らかな関数となり，よって X は滑らかである．ここで軌道 γ_p は，接ベクトル場の積分曲線であることが重要である．すなわち，軌道 γ_p の任意の点 $q=\gamma_p(s)$ に対して，X_q は $t=s$ における γ_p の接ベクトルである．実際，$\gamma_q(t) = \gamma_p(t+s)$ より

$$\begin{aligned}X_q &= \lim_{t\to 0}\frac{\gamma_q(t) - q}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\gamma_p(t+s) - \gamma_p(s)}{t}\end{aligned} \tag{2.3}$$

となり，(2.3) より

$$X_q f = \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi(t+s,p)) - f(\varphi(s,p))}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \varphi_s(\gamma_p(t)) - f \circ \varphi_s(p)}{t} \\
&= X_p(f \circ \varphi_s) \\
&= ((\varphi_s)_* X_p) f
\end{aligned}
$$

である．すなわち

$$
(\varphi_s)_* X_p = X_{\gamma_p(s)} \tag{2.4}
$$

が得られる．

逆問題：任意の M 上の接ベクトル場 X に対して，X が φ_t から誘導された接ベクトル場となるような微分同相写像の 1 パラメーター群が存在するか？ その答えは次の定理 2.1 で与えられる．

定義 2.2 U を可微分多様体 M の開集合とする．任意の $p \in U$，$|t| < \epsilon$ に対して，条件

1) 任意の $p \in U$ に対して，$\varphi_0(p) = p$,
2) $|s| < \epsilon$, $|t| < \epsilon$, $|t+s| < \epsilon$, そして $p, \varphi_t(p) \in U$ に対して，$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_s \circ \varphi_t(p)$,

をみたすような滑らかな写像 $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$，すなわち $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ が存在するとき，φ_t は U に作用する**微分同相写像の局所 1 パラメーター群**とよばれる．

微分同相写像の局所 1 パラメーター群も U 上の滑らかな接ベクトル場を誘導している．任意の $p \in U$ における局所座標系を $(V; x^i)$ $(V \subset U)$ とすると，φ の可微分性より，十分小さい正数 $\epsilon_0 < \epsilon$ に対して，$|t| < \epsilon_0$ ならば，$\varphi_t(p) \in V$ となる．(2.2) より

$$
X_p = \sum_{i=1}^{m} X_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \tag{2.5}
$$

が成立する．ここで

$$
X_p^i = \left. \frac{dx^i(\gamma_p(t))}{dt} \right|_{t=0} \tag{2.6}
$$

である．次に，2 点 p と $q = \gamma_p(s)$ が V の点である場合，

$$
X_q = \sum_{i=1}^{m} X_q^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q \tag{2.7}
$$

が成り立つ．ここで

$$X_q^i = \left.\frac{dx^i(\gamma_p(t))}{dt}\right|_{t=s} \tag{2.8}$$

である．

定理 2.1 X を M 上の滑らかな接ベクトル場としよう．このとき，$X|_U$ が U 上の φ_t から誘導された接ベクトル場となるような，任意の点 $p \in M$ における近傍 U と U 上の微分同相写像の 1 パラメーター群 φ_t $(|t| < \epsilon)$ が存在する．

証明 点 p における局所座標系を $(V; x^i)$ としよう．そして常微分方程式

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.9}$$

を考えよう．ここで，X^i は自然基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq m\right\}$ に関する接ベクトル場 X の成分である．すなわち

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

である．

常微分方程式論によると，任意の点 $q \in U_1$ に対して，方程式 (2.9) はこの点を通る一意の積分曲線 $x_q(t)$ $(|t| < \epsilon_1)$ をもつような，$\epsilon_1 > 0$ と点 p における近傍 $U_1 \subset V$ が存在する．すなわち，この積分曲線は，方程式と初期条件

$$\begin{cases} \dfrac{dx_q^i(t)}{dt} = X^i(x_q(t)), \qquad |t| < \epsilon_1, \quad 1 \leq i \leq m, \\ x_q(0) = q \end{cases} \tag{2.10}$$

をみたしている．

さらに，解 $x_q(t)$ は (t, q) に関して滑らかな関数である．

$$\varphi(t, q) = \varphi_t(q) = x_q(t), \qquad q \in U_1, \qquad |t| < \epsilon_1 \tag{2.11}$$

とおくと，$\varphi : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times U_1 \longrightarrow M$ は滑らかな関数である．これが微分同相写像の 1 パラメーター群であることを示そう．

任意の $|t| < \epsilon_1, |s| < \epsilon_1, |t+s| < \epsilon_1$ と任意の $q, \varphi_s(q) \in U_1$ に対して，$x_q(t+s)$ と $x_{\varphi_s(q)}(t)$ は点 $x_q(s) = \varphi_s(q)$ を通る (2.9) の積分曲線なので，解の一意性より

$$\varphi_{t+s}(q) = x_q(t+s) = x_{\varphi_s(q)}(t) = \varphi_t \circ \varphi_s(q)$$

が得られる．したがって，φ_t は $X|_{U_1}$ を誘導する微分同相写像の 1 パラメーター群である． □

点 p では $X_p \neq 0$ としよう．第 1 章の定理 4.3 より，$X = \partial/\partial u^1$ となるよう

な点 p における局所座標 u^i が存在する．したがって，φ_t は

$$\varphi_t(u^1,\ldots,u^m)=(u^1+t,u^2,\ldots,u^m) \tag{2.12}$$

と単純な形でかける．すなわち，φ_t は u^1 軸に沿っての移動なのである．

注意．明らかに (2.9) は局所座標系によらない．座標近傍 V_1, V_2 $(V_1\cap V_2\neq\varnothing)$ に対して，同じベクトル場 X から生成された V_1, V_2 それぞれに作用するような微分同相写像の 1 パラメーター群 $\varphi_t^{(1)}$，$\varphi_t^{(2)}$ があるとする．このとき，(2.9) の解の一意性より，$V_1\cap V_2$ 上の $\varphi_t^{(1)}$ と $\varphi_t^{(2)}$ の作用は一致することがわかる．

系　X を滑らかなコンパクトな多様体上の滑らかな接ベクトル場とする．このとき，X は M 上の微分同相写像の 1 パラメーター群を生成する．

証明　定理 2.1 より，任意の点 $p\in M$ に対して，$U(p)$ 上に微分同相写像の 1 パラメーター群 $\varphi_t(p)$ が存在するような近傍 $U(p)$ と正数 $\epsilon(p)$ がある．上記の注意より，そのような二つの任意の近傍 $U(p)$ の共通部分上で微分同相写像の 1 パラメーター群の作用は一致する．M はコンパクトであるので，正数 ϵ_α と $\{U(p), p\in M\}$ の有限部分被覆 $\{U_\alpha, 1\leq\alpha\leq r\}$ がある．ここで $\epsilon=\min\{\epsilon_\alpha|1\leq\alpha\leq r\}$ としよう．このとき，写像 $\varphi:(-\epsilon,\epsilon)\times M\longrightarrow M$ を次のように定義しよう．任意の $p\in U_\alpha$ に対して，

$$\varphi(t,p)=\varphi_t^{(\alpha)}(p),\qquad |t|<\epsilon \tag{2.13}$$

とする．すると，φ を写像 $\mathbb{R}\times M\longrightarrow M$ に拡張できる．任意の実数に対して，$|t|/N<\epsilon$ をみたすような正の整数 N があり，したがって，

$$\varphi(t,p)=\left[\varphi_{t/N}\right]^N(p) \tag{2.14}$$

は N によらない．ここで，上記の式の右辺は局所写像 $\varphi_{t/N}$ を自分自身と N 回合成したものである．このとき，明らかに，$\varphi:\mathbb{R}\times M\longrightarrow M$ は接ベクトル場 X から生成された微分同相写像の 1 パラメーター群である．　□

定理 2.2　φ_t を滑らかな多様体 M 上の微分同相写像の 1 パラメーター群で，X は φ_t から生成された M における接ベクトル場としよう．このとき微分同相写像 $\psi: M\longrightarrow M$ に対して，ψ_*X は微分同相写像の 1 パラメーター群 $\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$ から誘導された M 上の接ベクトル場である．

証明　M 上の任意の関数 f に対して，定義より

$$\begin{aligned}(\psi_*X_p)f&=X_p(f\circ\psi)\\&=\left.\frac{d}{dt}f\circ\psi(\varphi_t(p))\right|_{t=0}\end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} f(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(\psi(p)))\Big|_{t=0}$$

となる．したがって，$\psi_* X_p$ は 1 パラメーター変換群 $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ の点 $\psi(p)$ を通る軌道の点 $\psi(p)$ における接ベクトル場である．したがって，$\psi_* X$ は $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ から誘導された M 上の接ベクトル場である． □

定義 2.3 X を M 上の滑らかな接ベクトル場 X とし，$\psi : M \longrightarrow M$ を微分同相写像としよう．このとき，

$$\psi_* X = X \tag{2.15}$$

をみたす接ベクトル X を ψ の**作用で不変**という．

定理 2.2 より次が得られる．

系 接ベクトル場 X が微分同相写像 $\psi : M \longrightarrow M$ の作用で不変であるための必要十分条件は，X によって生成される微分同相写像の 1 パラメーター群 φ_t は ψ と交換可能であることである．

定理 2.3 多様体 M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 X, Y に対して，X によって生成される微分同相写像の 1 パラメーター群を φ_t とすると，

$$\begin{aligned}[X\,,\,Y] &= \lim_{t\to 0} \frac{Y - (\varphi_t)_* Y}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^{-1})_* Y - Y}{t}\end{aligned} \tag{2.16}$$

が成り立つ．

証明 第一番目の等式を証明すれば十分である．任意の $p \in M$ と p の近傍における滑らかな関数 f に対して，

$$F(t) = f(\varphi_t(p)) \tag{2.17}$$

とおこう．このとき，

$$\begin{aligned}F(t) - F(0) &= \int_0^1 \frac{dF(st)}{ds} ds \\ &= t \int_0^1 F'(u)\big|_{u=st}\, ds\end{aligned}$$

より，

$$f(\varphi_t(p)) = f(p) + t g_t(p) \tag{2.18}$$

が成り立つ．ここで，

$$g_t(p) = \int_0^1 F'(u)|_{u=st}\, ds = \int_0^1 \left.\frac{df(\varphi_u(p))}{du}\right|_{u=st} ds \tag{2.19}$$

であり，

$$g_0(p) = \int_0^1 F'(u)|_{u=0}\, ds = \left.\frac{df(\varphi_u(p))}{du}\right|_{u=0} = X_p f \tag{2.20}$$

である．

(2.16) の第 2 項を f に作用させると

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{t\to 0}\frac{Y-(\varphi_t)_*Y}{t}\right)_p f &= \lim_{t\to 0}\frac{Y_p f - Y_{\varphi_t^{-1}(p)}(f\circ\varphi_t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{Y_p f - Y_{\varphi_t^{-1}(p)}f}{t} - \lim_{t\to 0} Y_{\varphi_t^{-1}(p)}(g_t) \\
&= X_p(Yf) - Y_p(Xf) \\
&= [X\,,\,Y]_p\, f
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$[X\,,\,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{Y-(\varphi_t)_*Y}{t}$$

が成り立つ． □

注意 1. γ_p を微分同相写像の 1 パラメーター群 φ_t の点 p を通る軌道としよう．φ_t^{-1} は γ_p の点 $q = \gamma_p(t) = \varphi_t(p)$ を点 p に写すので，$(\varphi_t^{-1})_*$ は接空間 $T_q(M)$ から接空間 $T_p(M)$ への準同形写像となる．Y を軌道 γ_p における M 上の接ベクトル場とすると，$(\varphi_t^{-1})_* Y_{\varphi_t(p)}$ は $T_p(M)$ 上の曲線である．このとき，定理 2.3 によると，$[X\,,\,Y]_p$ は $t=0$ におけるこの曲線の接ベクトル，すなわち，X の軌道に沿っての接ベクトル場 Y の変化率であることを述べている．(2.16) の右辺の作用素を，X に関する接ベクトル場 Y の**リー微分**といい，$L_X Y$ 表す．したがって，定理 2.3 は

$$L_X Y = [X\,,\,Y] \tag{2.21}$$

となる．

リー微分は，M 上の任意のテンソル場に一般化できる．すなわち，写像 $(\varphi_t)^*$ は余接空間 $T_q^*(M)$ から $T_p^*(M)$ への準同形写像であり，$(\varphi_t^{-1})_*$ を用いると，テンソル空間の準同形写像

$$\Phi_t : T_s^r(\varphi_t(p)) \longrightarrow T_s^r(p)$$

が誘導される．要するに，任意の $v_1,\ldots,v_r \in T_{\varphi_t(p)}(M)$, $v^{*1},\ldots,v^{*s} \in T^*_{\varphi_t(p)}(M)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\Phi_t(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v^{*1}\otimes\cdots\otimes v^{*s})\\
&\qquad\qquad = (\varphi_t^{-1})_*v_1\otimes\cdots\otimes(\varphi_t^{-1})_*v_r\otimes\varphi_t^*v^{*1}\otimes\cdots\otimes\varphi_t^*v^{*s}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

が成り立つ．したがって，X に関する (r,s) 型のテンソル場 ξ のリー微分を

$$
L_X\xi = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_t(\xi)-\xi}{t} \tag{2.23}
$$

と定義する．明らかに，$L_X\xi$ も (r,s) 型のテンソル場である．

接ベクトル場 X に関するスカラー場 f のリー微分は，X に関する f の方向微分である．

注意 2. 外微分形式のリー微分は，(2.23) の特別な場合である．M 上の r 次外微分形式 ω に対して，$L_X\omega$ は

$$
L_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega-\omega}{t} \tag{2.24}
$$

で定義される r 次外微分形式である．M 上の滑らかな任意の r 個の接ベクトル場 $Y_1,\ldots,Y_r$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\langle Y_1\wedge\cdots\wedge Y_r\,,\,L_X\omega\rangle\\
&\qquad = X\,\langle Y_1\wedge\cdots\wedge Y_r\,,\,\omega\rangle - \sum_{i=1}^{r}\langle Y_1\wedge\cdots\wedge L_XY_i\wedge\cdots\wedge Y_r\,,\,\omega\rangle
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

が成り立つことは容易に示すことができる．

任意の M 上の滑らかな接ベクトル場 X に対して，線形作用素 $i(X): A^r(M) \longrightarrow A^{r-1}(M)$ を次のように定義する．

$r=0$ の場合，$i(X)$ は零写像として $A^0(M)$ に作用する．

$r=1$ の場合，任意の $\omega\in A^r(M)$ に対して，

$$
i(X)\omega = \langle X\,,\,\omega\rangle\,. \tag{2.26}
$$

$r>1$ の場合，任意の滑らかな接ベクトル場 $Y_1,\ldots Y_{r-1}$ に対して，

$$
\langle Y_1\wedge\cdots\wedge Y_{r-1}\,,\,i(X)\omega\rangle = \langle X\wedge Y_1\wedge\cdots\wedge Y_{r-1}\,,\,\omega\rangle\,. \tag{2.27}
$$

このとき，次の公式を容易に示すことができる．

1) $L_X\circ i(Y) - i(Y)\circ L_X = i([X\,,\,Y])$,

2) $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X,Y]}$,
3) $d \circ i(X) + i(X) \circ d = L_X$,
4) $d \circ L_X = L_X \circ d$.

これらは**カルタンの公式**といわれ，外微分形式論に重要な役割を果している．その証明は読者にまかせる．

続いて，上記の微分同相写像の1パラメーター群の議論をリー群に応用する．X を r 次元リー群 G 上の右不変ベクトル場で，X によって誘導される微分同相写像の1パラメーター群を φ_t としよう．右移動 R_a $(a \in G)$ は接ベクトル場 X を保存しているので，定理2.2の系によると，R_a は φ_t と可換である，すなわち

$$R_a \circ \varphi_t = \varphi_t \circ R_a \tag{2.28}$$

が成り立つ．

したがって，$|t| < \epsilon$ のとき，$\varphi_t(p)$ が単位元 e の近傍 U で定義されるとすると，任意の点 $a \in G$ に対して，$|t| < \epsilon$ のとき，$\varphi_t(p)$ は a の近傍 $U \cdot a$ で定義されている．このことは，$|t| < \epsilon$ であり，かつすべての $p \in M$ に対して $\varphi_t(p)$ が定義される共通の $\epsilon > 0$ が存在することを意味している．したがって，右不変ベクトル場 X はリー群 G 上の微分同相写像の1パラメーター群を生成する(定理2.1の系を参照)．ここで

$$a_t = \varphi_t(e) \tag{2.29}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} a_{t+s} &= \varphi_{t+s}(e) = \varphi_t \circ \varphi_s(e) = \varphi_t \circ R_{a_s}(e) \\ &= R_{a_s} \circ \varphi_t(e) = R_{a_s}(a_t) = a_t \cdot a_s \end{aligned}$$

となり，したがって，a_t はリー群 G の1パラメーター部分群(すなわち，1次元リー部分群)となる．

(2.28)より，

$$\varphi_t(x) = \varphi_t \circ R_x(e) = R_x \circ \varphi_t(e) = a_t \cdot x$$

となるので，φ_t の G 上の作用は a_t における G の左移動となる．すなわち，

$$\varphi_t = L_{a_t} \tag{2.30}$$

である．このことから，右不変ベクトル場を**無限小左移動**ともよぶ．

上記の議論によると，リー群 G 上の任意の右不変ベクトル場 X は G の 1 パラメーター部分群 a_t を生成し，X によって生成された G の微分同相写像の 1 パラメーター群 φ_t は a_t における G の左移動であることがわかる．

定理 2.4 $\mathrm{Ad}: G \longrightarrow GL(r;\mathbb{R})$ を r 次元リー群 G の随伴表現で，

$$\mathrm{ad} = (\mathrm{Ad})_*: G_e \longrightarrow gl(r;\mathbb{R})$$

を G のリー代数 G_e の随伴表現としよう．このとき，任意の $X, Y \in G_e$ に対して，

$$\mathrm{ad}(X)\cdot Y = -[X\,,\,Y] \tag{2.31}$$

が成り立つ．

証明 a_t を X によって生成された 1 パラメーター部分群としよう．このとき，対応する右不変ベクトル場 $\widetilde{X}$ から生成される微分同相写像の 1 パラメーター群は $\varphi_t = L_{a_t}$ である．次に，Y に対応する右不変ベクトル場を $\widetilde{Y}$ としよう．このとき，

$$\mathrm{ad}(X) = (\mathrm{Ad})_* X = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Ad}(a_t) - \mathrm{Ad}(e)}{t}$$

なので，定理 2.3 より

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(X)\cdot Y &= \lim_{t\to 0}\frac{(L_{a_t})_*\circ(R_{a_t^{-1}})_*Y - Y}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t)_*\widetilde{Y}_{a_t^{-1}} - \widetilde{Y}_e}{t}\\ &= -[\widetilde{X}\,,\,\widetilde{Y}]_e\\ &= -[X\,,\,Y]\end{aligned}$$

が成り立つ． □

次に，一般リー変換群について議論する．

定義 2.4 M を m 次元滑らかな多様体で，G を r 次元リー群としよう．条件

1) G の単位元を e とすると，任意の $x \in M$ に対して

$$e\cdot x = x,$$

2) 任意の $g_1, g_2 \in G$ と $x \in M$ に対して，

$$g_1\cdot(g_2\cdot x) = (g_1\cdot g_2)\cdot x,$$

をみたす滑らかな写像 $\theta: G\times M \longrightarrow M$，すなわち，

$$\theta(g, x) = g \cdot x, \qquad (g, x) \in G \times M$$

が存在するとき，G を M に (左から) 作用する**リー変換群**とよぶ.

もちろん，微分同相写像の 1 パラメーター群はリー変換群の特殊な例である．すなわち $G = \mathbb{R}$ である．なお，自分自身に左から作用するリー群 G もリー変換群である.

単位元ではない任意の $g \in G$ に対して，$g \cdot x \neq x$ をみたすような点 $x \in M$ が存在すれば，G は M に**効果的に**作用するという．任意の $g \neq e$ と $x \in M$ に対して，$g \cdot x \neq x$ が成立すれば，G の M への作用は固定点をもたない，あるいは G は M に**自由に**作用するという.

G の各元 g に対して，

$$L_g(x) = g \cdot x, \qquad x \in M \tag{2.32}$$

とおくと，$L_g : M \longrightarrow M$ は滑らかな写像である．さらに，$L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ なので L_g は M から M への微分同相写像であり，$\{L_g | g \in G\}$ は M の微分同相写像群の部分群となる．G が M に効果的に作用するとき，G はこの群に同形である.

リー群 G のリー代数に準同形であるような M 上の有限次元リー代数が存在することは，リー変換群論の基本的な定理である．これをみるためには，まずリー代数 G_e から M 上の滑らかな接ベクトル場の空間への写像をつくろう.

任意の $X \in G_e$ と X によって生成される 1 パラメーター部分群 a_t に対して，L_{a_t} は M に作用する微分同相写像の 1 パラメーター群である．L_{a_t} から誘導された M 上の接ベクトル場 $\widetilde{X}$ を M 上の X によって生成された**基本接ベクトル場**といい，定義より，

$$\widetilde{X}_p = \lim_{t \to 0} \frac{L_{a_t}(p) - p}{t} \tag{2.33}$$

が成り立つ.

定理 2.5　M に作用するリー変換群 G に対して，M 上の基本接ベクトル場の全体集合は，G のリー代数 G_e に準同形であるリー代数となる．さらに，M への作用が効果的ならば，基本接ベクトル場によって生成されるリー代数は G_e に同形である.

証明 M 上の滑らかな接ベクトル場の全体 $\Gamma(T(M))$ がポアソン括弧積に関して無限次元リー代数となることはすでに述べた．次に，(2.33) における写像

$$\sigma : G_e \longrightarrow \Gamma(T(M))$$

がリー代数間の準同形写像であることを示そう．

σ の線形性は (2.33) からは明らかではない．そこで，σ の別な表現を導入しよう．1 点 $p \in M$ をとり，固定して考える．写像 $\sigma_p : G \longrightarrow M$ を

$$\sigma_p(g) = L_g(p) = g \cdot p \tag{2.34}$$

と定義し，微分写像 $(\sigma_p)_* : G_e \longrightarrow T_p(M)$ はちょうど (2.33) の写像，すなわち

$$(\sigma_p)_* X = \widetilde{X}_p, \qquad X \in G_e \tag{2.35}$$

であることを示そう．このためには，任意の M 上の滑らかな関数 f に対して，直接計算すればよい．つまり

$$\begin{aligned}((\sigma_p)_* X) f &= X(f \circ \sigma_p) \\ &= \frac{d}{dt} f \circ \sigma_p(a_t)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(L_{a_t}(p))\bigg|_{t=0} \\ &= \widetilde{X}_p f,\end{aligned}$$

すなわち (2.35) が成り立つ．したがって，写像 $\sigma : G_e \longrightarrow \Gamma(T(M))$ は

$$(\sigma(X))_p = (\sigma_p)_* X = \widetilde{X}_p, \qquad X \in G_e \tag{2.36}$$

によって与えられる．よって，微分写像 $(\sigma_p)_*$ は線形写像なので，σ も線形である．

σ は $\mathcal{G}$ から $\Gamma(T(M))$ への線形写像ともみなすことができる．G 上の右不変ベクトル場 X に対して，$\widetilde{X} = \sigma(X_e)$ とおこう．このとき，任意の $g \in G$ に対して

$$(\sigma_p)_* X_g = (\sigma_p)_* \circ (R_g)_* X_e = (\sigma_{(g \cdot p)})_* X_e = \widetilde{X}_{g \cdot p}$$

が成り立つ．

したがって，基本接ベクトル場 $\widetilde{X}$ は写像 $(\sigma_p)_*$ による G 上の右不変ベクトル場 X の像の拡張とみなせる．よって，任意の G 上の右不変ベクトル場 X, Y に対して，

$$(\sigma_p)_* [X\,,\,Y]_g = [\widetilde{X}\,,\,\widetilde{Y}]_{\sigma_p(g)}$$

となり，

$$\sigma([X_e\,,\,Y_e]) = [\widetilde{X}\,,\,\widetilde{Y}] \tag{2.37}$$

が成り立つ．すなわち $\sigma : G_e \longrightarrow \Gamma(T(M))$ は，M 上の基本接ベクトル場で生成されるリー代数がその像であるようなリー代数間の準同形写像となる．

ここで $\widetilde{X}=0$ ならば，対応する微分同相写像の 1 パラメーター群 L_{a_t} は自明である．すなわち，任意の $x \in M$ に対して

$$L_{a_t}(x) = a_t \cdot x = x$$

となる．G が M に効果的に作用する場合，この等式が成り立つための必要十分条件は $a_t = e$ である．したがって，$X=0$，すなわち σ は 1 対 1 写像である．これより，M 上の基本接ベクトル場のリー代数は，リー群 G のリー代数に同形であることがわかる．□

G が M 内に固定点をもたない場合, いたるところ 1 次独立である r 個の基本接ベクトル場が存在することは容易にわかる．任意の基本接ベクトル場はそれらの定数係数の 1 次結合として表すことができる．具体的な例として, 滑らかな多様体 M の標構束 P を考えよう．§4-3 によると, 構造群 $GL(m;\mathbb{R})$ は P に左作用素のリー変換群として自然に作用する．局所的に P は直積 $\pi^{-1}(U) \simeq U \times GL(m;\mathbb{R})$ なので，この表現を用いると，構造群 $GL(m;\mathbb{R})$ はファイバーに左移動として作用する．すなわち，任意の $p \in U$，$A, B \in GL(m;\mathbb{R})$ に対して，

$$A \cdot (p, B) = (p, A \cdot B) \tag{2.38}$$

が成り立つ．したがって，P 上の $GL(m;\mathbb{R})$ の作用は固定点をもたない．さらに，P の任意の二つの元が $GL(m;\mathbb{R})$ の作用で同値であるための必要十分条件は，それらの元が同じ原点をもつことである．したがって，多様体 M は，群 $GL(m;\mathbb{R})$ の作用で生成された同値関係に関する標構束 P の商空間となる．

主束は標構束の一般化である．リー変換群を用いると，主束は次のように定義される．P, M を 2 つの滑らかな多様体で，G は P に左より作用する r 次元リー変換群としよう．このとき，P が条件

1) G の P への作用は固定点をもたない,
2) M は G の群作用で定義された同値関係に関する P の商空間であり，その射影写像 $\pi : P \longrightarrow M$ は滑らかな写像である,
3) P は局所的に自明である．すなわち，任意の点 $x \in M$ に対して，$\pi^{-1}(U)$ が $U \times G$ に同形であるような x における近傍 U が存在する．すなわち，任意の $a \in G$ に対して

$$\varphi(a \cdot p) = a \cdot \varphi(p)$$

が成り立つような微分同相形写像

$$p \in \pi^{-1}(U) \longrightarrow (\pi(p), \varphi(p)) \in U \times G$$

が存在する，

をみたすとき，P を M 上のリー群 G を構造群としてもつ**主束**という．

任意の点 $x \in M$ におけるファイバー $\pi^{-1}(x)$ は，点 $p \in \pi^{-1}(x)$ を通る P 上のリー変換群 G の軌道

$$G \cdot p = \{L_a(p) | a \in G\}$$

である．P 上の基本接ベクトル場のリー群は，リー群 G のリー代数に同形である．G の作用は自由なので，P の各点における基本接ベクトル場は r 次元接空間を張る．この空間はその点におけるファイバ $\pi^{-1}(x)$ の接空間であり，**垂直空間**とよばれる．この議論を用いると，主束の接続理論ができる (Kobayashi and Nomizu 1963, 1969 を参照).

§6-3 動標構の方法

M を m 次元の連結で滑らかな多様体，G を r 次元リー群とし，構造方程式

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k \tag{3.1}$$

をみたす G の右基本微分形式を考えよう．ここで，c^i_{jk} はリー群 G の構造定数である．任意の滑らかな関数 $f : M \longrightarrow G$ に対して

$$\psi^i = f^* \omega^i \tag{3.2}$$

とおくと，ψ^i は連立方程式

$$d\psi^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\, \psi^j \wedge \psi^k \tag{3.3}$$

をみたす．

この式は，写像 $f : M \longrightarrow G$ が局所的に存在するための十分条件である．

定理 3.1 M 上に，方程式 (3.3) をみたす r 個の微分 1 次形式 ψ^i $(1 \leq i \leq r)$ があるとしよう．ここで，c^i_{jk} はリー群 G の構造定数である．このとき，G の任意の右基本微分形式 ω^i に対して，

$$f^* \omega^i = \psi^i \tag{3.4}$$

をみたすような各点 $p \in M$ の近傍 U と滑らかな写像 $f : U \longrightarrow G$ が存在す

る．さらに，このような写像 f_1, f_2 に対して

$$f_2 = R_g \circ f_1 \tag{3.5}$$

をみたすような G の元 g が存在する．すなわち，f_1 と f_2 の像は G の右移動で一致する．

証明　$M \times G$ 上に $m + r$ 個の独立変数のパッフ方程式

$$\theta^i \equiv \psi^i - \omega^i = 0, \qquad 1 \leq i \leq r \tag{3.6}$$

を考えよう．ω^i はいたるところで 1 次独立なので，θ^i もいたるところで 1 次独立である．方程式 (3.6) は $M \times G$ の m 次元平面分布である．このとき，

$$\begin{aligned} d\theta^i &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} c_{jk}^i \left(\psi^j \wedge \psi^k - \omega^j \wedge \omega^k\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} c_{jk}^i \left(\psi^j \wedge \theta^k + \theta^j \wedge \omega^k\right) \\ &\equiv 0 \bmod \left(\theta^1, \ldots, \theta^r\right) \end{aligned}$$

であるので，フロベニウスの定理より，連立方程式 (3.6) は完全積分可能である．よって，任意の点 $(x_0, a_0) \in M \times G$ に対して，(3.6) が (x_0, a_0) を通るただ一つの m 次元積分多様体

$$\varphi^i \left(x^1, \ldots, x^m; a^1, \ldots, a^r\right) = 0, \qquad 1 \leq i \leq r \tag{3.7}$$

をもつような x_0 の近傍 $(U; x^\alpha)$ と a_0 の近傍 $(V; a^i)$ が存在する．

ω^i $(1 \leq i \leq r)$ は 1 次独立なので，(3.7) が

$$f^i = f^i \left(x^1, \ldots, x^m\right), \qquad 1 \leq i \leq r \tag{3.8}$$

に対して，

$$\varphi^i \left(x^1, \ldots, x^m; f^1(x), \ldots, f^r(x)\right) \equiv 0, \qquad x \in U_1, \tag{3.9}$$
$$f^i \left(x_0^1, \ldots, x_0^m\right) = a_0^i, \qquad 1 \leq i \leq r$$

が成り立つような x_0 における近傍 $U_1 \subset U$ が存在する．もちろん，(3.8) の写像 $f : U_1 \longrightarrow G$ は

$$\psi^i = f^* \omega^i, \qquad 1 \leq i \leq r$$

をみたす．

このような，二つの写像 $f_1, f_2 : U_1 \longrightarrow G$，すなわち

$$f_1(x_0) = a_1, \qquad f_2(x_0) = a_2 \tag{3.10}$$

に対して，

$$g = a_1^{-1} \cdot a_2 \tag{3.11}$$

とおくと，

$$(R_g \circ f_1)^* \omega^i = (f_1)^* \circ (R_g)^* \omega^i = (f_1)^* \omega^i = \psi^i \tag{3.12}$$

と

$$(R_g \circ f_1)(x_0) = a_2 \tag{3.13}$$

が成り立つ．したがって，$R_g \circ f_1$ と f_2 はともに同一の初期条件をみたす (3.6) の解である．ここで，解の一意性より

$$f_2 = R_g \circ f_1$$

となる． □

次に，N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ における剛体運動群 $E(N)$ と $\mathbb{R}^N$ の直交標構 $(O; \delta_1, \ldots, \delta_N)$ を考えよう．このとき，$\widetilde{a} \in E(N)$ の $\mathbb{R}^N$ に対する (右) 作用は

$$x \cdot \widetilde{a} = x \cdot A + a \tag{3.14}$$

である．ここで，

$$\begin{cases} x = \left(x^1, \ldots, x^N\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} x^\alpha \delta_\alpha, \\ a = \left(a^1, \ldots, a^N\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} a^\alpha \delta_\alpha, \\ A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N^1 & \cdots & a_N^N \end{pmatrix}, \\ A \cdot {}^t A = I, \qquad \det A > 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

である．すなわち，行列 A は行列式の値が 1 となる直交行列である．したがって，任意の $\widetilde{a} \in E(N)$ は行列の組 (A, a) で表すことができる．

行列の組 $\widetilde{a} = (A, a)$, $\widetilde{b} = (B, b) \in E(N)$ に対して，$\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}$ の $\mathbb{R}^N$ の作用は $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ の作用それぞれを順に用いることである．よって，群 $E(N)$ の乗法は

$$\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = (A \cdot B, a \cdot B + b) \tag{3.16}$$

であり，$\widetilde{a}$ の逆元は

$$\widetilde{a}^{-1} = (A^{-1}, -a \cdot A^{-1}) \tag{3.17}$$

である．明らかに，$E(N)$ は $\frac{1}{2}N(N+1)$ 次元リー群である．

$\mathbb{R}^N$ の直交標構の全体を $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^N\right)$ とし，一つ固定した標構 $(O;\delta_1,\ldots,\delta_N)$ と同じ向きをもつ $\mathbb{R}^N$ の直交標構の全体を $\mathcal{F}_+\left(\mathbb{R}^N\right)$ としよう．これらの集合はそれぞれ構造群 $O(N;\mathbb{R})$ と $SO(N;\mathbb{R})$ をもつ $\mathbb{R}^N$ の主束である．ここで，群 $SO(N;\mathbb{R})$ は行列式が 1 である行列の全体であり，**特殊直交群**とよばれる．

$\mathbb{R}^N$ の $(O;\delta_1,\ldots,\delta_N)$ と同じ向きをもつ任意の直交標構 $(p;e_1,\ldots,e_N)$ に対して，$(O;\delta_1,\ldots,\delta_N)$ を $(p;e_1,\ldots,e_N)$ に変換する剛体運動 $\widetilde{a}\in E(N)$ が存在することから，多様体 $\mathcal{F}_+(\mathbb{R}^N)$ は $E(N)$ と同一視できる．それらの対応関係は

$$\widetilde{a}=(A,a)\longleftrightarrow(p;e_1,\ldots,e_N) \tag{3.18}$$

である．ただし

$$\begin{cases} \overrightarrow{Op}=\sum\limits_{\alpha=1}^{N} a^\alpha\delta_\alpha, \\ e_\alpha=\sum\limits_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta\delta_\beta \end{cases} \tag{3.19}$$

である．ここで

$$\begin{cases} \delta={}^t(\delta_1,\ldots,\delta_N), \\ e={}^t(e-1,\ldots,e_N) \end{cases} \tag{3.20}$$

とおくと，(3.19) は

$$\begin{cases} \overrightarrow{Op}=a\cdot\delta, \\ e=A\cdot\delta \end{cases} \tag{3.21}$$

とかける．

標構 $(p;e_1,\ldots,e_N)$ に無限小運動を用いると，$(p+dp;e_\alpha+de_\alpha)$ が得られる．ベクトル dp と de_α も，標構 $(p;e_1,\ldots,e_N)$ に関して表すことができる．ここで

$$\begin{cases} dp=\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \omega^\alpha e_\alpha, \\ de_\alpha=\sum\limits_{\beta=1}^{N} \omega_\alpha^\beta e_\beta \end{cases} \tag{3.22}$$

とおこう．1 次形式

$$\omega^\alpha,\quad \omega_\alpha^\beta\qquad(1\leq\alpha,\beta\leq N)$$

は**動標構の相対成分**とよばれる．$\theta=(\omega^1,\ldots,\omega^N),\omega=(\omega_\alpha^\beta)$ とおくと，(3.22)

は

$$\begin{cases} dp = \theta \cdot e, \\ de = \omega \cdot e \end{cases} \tag{3.23}$$

とかける．(3.21) を微分すると，

$$dp = da \cdot \delta = da \cdot A^{-1} \cdot e,$$
$$de = dA \cdot \delta = dA \cdot A^{-1} \cdot e$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned} \theta &= da \cdot A^{-1}, \\ \omega &= dA \cdot A^{-1} \end{aligned} \tag{3.24}$$

となる．ここで，$A \cdot A^{-1} = I$ より

$$dA \cdot A^{-1} + A \cdot dA^{-1} = dA \cdot A^{-1} + {}^t\left(dA \cdot A^{-1}\right) = 0$$

が得られる．すなわち，

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0 \tag{3.25}$$

が成り立つ．

リー群 $E(N)$ の視点からみると，相対成分 ω^α と $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ は $E(N)$ の右基本微分形式である．実際，任意の $\widetilde{b} = (B, b) \in E(N)$ に対して，

$$R_{\widetilde{b}}(\widetilde{a}) = \widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = (A \cdot B, a \cdot B + b)$$

となり，したがって，

$$\left(R_{\widetilde{b}}\right)^* \theta = (da \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = da \cdot A^{-1} = \theta,$$
$$\left(R_{\widetilde{b}}\right)^* \omega = (dA \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = dA \cdot A^{-1} = \omega$$

が成り立つ．

ここで，直交標構を用いたので，相対成分はすべて下付添字で表すことができる．すなわち，

$$\omega_\alpha = \omega^\alpha, \qquad \omega_{\alpha\beta} = \omega_\alpha^\beta$$

となる．上記の式は $\mathbb{R}^N$ の計量テンソル $g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta$ を用いて添字を下げたとも考えられる．ここで (3.23) を外微分すれば

$$d\theta \cdot e - \theta \wedge de = 0,$$

$$d\omega \cdot e - \omega \wedge de = 0$$

が得られる．よって，$E(N)$ の構造方程式は

$$\begin{cases} d\theta = \theta \wedge \omega, \\ d\omega = \omega \wedge \omega \end{cases} \tag{3.26}$$

あるいは，

$$\begin{cases} d\omega_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{N} \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha}, \\ d\omega_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{N} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} \end{cases} \tag{3.27}$$

である．

$E(N)$ に定理 3.1 を適用して，下記の $\mathbb{R}^N$ の動標構の基本定理が得られる．

定理 3.2　ψ_α と $\psi_{\beta\gamma} = -\psi_{\gamma\beta}$ $(1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq N)$ を，n 個の変数の 1 次微分形式としよう．このとき，与えられた 1 次微分形式が相対成分となる n 個のパラメーターの直交標構族が存在するための必要十分条件は，微分形式が，次の式

$$\begin{cases} d\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \psi_\beta \wedge \psi_{\beta\alpha}, \\ d\psi_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{N} \psi_{\alpha\gamma} \wedge \psi_{\gamma\beta} \end{cases} \tag{3.28}$$

をみたすことである．

さらに，直交基底の任意のそのような二つの族は，$\mathbb{R}^N$ の剛体運動群で関係づけられる．

証明　変数 $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ の空間を M とし，$G = E(N)$ としよう．定理 3.1 より

$$f^*\omega_\alpha = \psi_\alpha, \qquad f^*\omega_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}$$

をみたすような写像 $f : M \longrightarrow E(N)$ が存在する．ここで

$$\widetilde{a} = f(x) = (A(x), a(x)),$$

とおくと，

$$\begin{cases} \overrightarrow{Op}(x) = a(x) \cdot \delta, \\ e(x) = A(x) \cdot \delta \end{cases} \tag{3.29}$$

であり，$(p(x); e_1(x), \ldots, e_N(x))$ が求める直交標構族である． □

動標構の概念は力学に由来するものである．例えば，剛体の運動を記述するのに，その剛体に直交標構をとり，それを固定すると，剛体の運動に伴ってその付けられた標構も運動する．このようにして，時間 t のパラメーター付きの直交標構族が得られる．これは，剛体の運動を完全に記述する．フランスの数学者 Cotton や Darboux は，1 パラメーター標構族の概念を多パラメーターの場合に一般化した．しかし，この理論を発展させ，幾何学に応用したのは E. Cartan であった．現在は，動標構と微分形式とをともに用いる方法は，微分幾何学の有力な研究方法となっている．この方法を，ユークリッド空間の微分多様体論に応用しよう．

$f: M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を向き付けられた m 次元滑らかな部分多様体 M から $\mathbb{R}^N$ への埋め込みとしよう．以下で使用される添字の範囲は

$$
\begin{gathered}
1 \leq i, j, k, l \leq m, \\
m+1 \leq A, B, C, D \leq N, \\
1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq N
\end{gathered} \tag{3.30}
$$

とする．記号の節約のため，M と $f(M)$ とは区別しないこととする．任意の点 $p \in M$ において，e_i は点 p における M 上の接ベクトルであり，e_A は点 p における法線ベクトルであり，$(e_1, \ldots, e_m)$ は M と同じ向きをもち，そして $(e_1, \ldots, e_N)$ は $\mathbb{R}^N$ における固定標構 $(O; \delta_1, \ldots, \delta_N)$ と同じ向きをもつような直交標構 $(p; e_1, \ldots, e_N)$ が付随するとしよう．M 上の任意の近傍 U に，連続的で滑らかな U の局所座標に依存するような標構場が存在するとき，これを部分多様体 M の**ダルブー標構**とよぶ．M の各点の十分小さい近傍にはつねにダルブー標構があることは明らかである．さらにこれらは，変換式

$$
\begin{cases}
e_i' = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j, \\
e_A' = \displaystyle\sum_{B=m+1}^{N} a_{AB} e_B
\end{cases} \tag{3.31}
$$

をみたす．ここで a_{ij}, a_{AB} は U 上の滑らかな関数であり，$(a_{ij}) \in SO(m; \mathbb{R})$, $(a_{AB}) \in SO(N-m; \mathbb{R})$ である．

M 上の任意の近傍 U にダルブー標構を選ぶと，U から $\mathcal{F}_+(\mathbb{R}^N)$ への滑らかな関数 f が得られる．$\mathbb{R}^N$ の動標構の相対成分を f^* で U に引き戻した 1 次微

分形式も ω_α と $\omega_{\alpha\beta}$ とで表す．明らかに，これらも構造方程式 (3.27) をみたすものである．

ダルブー標構の原点 p は M の点であり，点 p における M 上の接ベクトルは e_i なので，

$$dp = \sum_{i=1}^{m} \omega_i e_i, \qquad \omega_A = 0 \tag{3.32}$$

が得られ，ω_i $(1 \leq i \leq m)$ はいたるところで 1 次独立である．ここで

$$I = dp \cdot dp = \sum_{i=1}^{m} (\omega_i)^2, \tag{3.33}$$

$$dA = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m \tag{3.34}$$

とおくと，これらの量はダルブー標構の変換式 (3.31) に対して不変である．すなわち，M 上いたるところで定義されている．これらはそれぞれ M の**第 1 基本形式**および**面積要素**とよばれる．I をリーマン計量と考えると，M はリーマン多様体となる．このとき，リーマン多様体 M に $\mathbb{R}^N$ よりリーマン計量が誘導されたという．

ダルブー標構の運動方程式は

$$\begin{cases} de_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} e_j + \sum_{A=m+1}^{N} \omega_{iA} e_A, \\ de_B = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \omega_{Bj} e_j + \sum_{A=m+1}^{N} \omega_{BA} e_A \end{cases} \tag{3.35}$$

である．ここで，$\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ は，構造方程式

$$\begin{cases} d\omega_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \omega_{ji} \\ 0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \omega_{jA}, \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} d\omega_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_{A=m+1}^{N} \omega_{iA} \wedge \omega_{Aj}, \\ d\omega_{iB} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \omega_{ik} \wedge \omega_{kB} + \sum_{A=m+1}^{N} \omega_{iA} \wedge \omega_{AB}, \\ d\omega_{AB} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \omega_{Ak} \wedge \omega_{kB} + \sum_{C=m+1}^{N} \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} \end{cases} \tag{3.37}$$

をみたす上記の相対成分である．リーマン幾何学の基本定理より，(3.36) の第

1 式と歪対称性 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$ より，ω_{ij} はリーマン多様体 M のレビ・チビタ接続

$$De_i=\sum_{j=1}^m \omega_{ij}e_j \tag{3.38}$$

である．さらに (3.35) の第 1 式より，De_i は M の接平面への de_i の直交射影であることがわかる．

カルタンの補題 (第 2 章の定理 3.4) を用いると，(3.36) の第 2 式より

$$\omega_{jA}=\sum_{i=1}^m h_{Aji}\omega_i,\qquad h_{Aji}=h_{Aij} \tag{3.39}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned}\mathrm{II}&=\sum_{i,A}\omega_i\omega_{iA}e_A\\ &=\sum_{A=m+1}^N\left(\sum_{i,j=1}^m h_{Aij}\omega_i\omega_j\right)e_A\end{aligned} \tag{3.40}$$

とおくと，II はダルブー標構の変換式 (3.31) に独立である．したがって，M の法空間に値域をもつ M 上の 2 次微分形式である．これを，部分多様体 M の**第 2 基本形式**という．

M 上のレビ・チビタ接続の曲率は

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}&=d\omega_{ij}-\sum_{k=1}^m\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^m R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l\end{aligned}$$

となる．ここで，R_{ijkl} は曲率テンソルである．(3.37) の第 1 式より

$$R_{ijkl}=\sum_{A=m+1}^N(h_{Ail}h_{Ajk}-h_{Aik}h_{Ajl}) \tag{3.41}$$

が得られる．これは部分多様体 M の**ガウスの方程式**とよばれる．(3.37) の第 2 式と第 3 式は曲面論における**コダッチの方程式**とよばれる．

ユークリッド空間の超曲面の場合，上記の公式は簡単になる．M を $\mathbb{R}^{m+1}$ の向き付けられた超曲面としよう．このとき，M 上のダルブー標構はただ一つの法線ベクトル e_{m+1} をもつので，この場合にはダルブー標構の運動方程式は

$$dp=\sum_{i=1}^m\omega_ie_i,\qquad \omega_{m+1}=0,$$

$$de_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} e_j + \omega_{i\ m+1}\ e_{m+1},$$

$$de_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \omega_{m+1\ j}\ e_j$$

であり，構造方程式は

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \omega_{ji}, \tag{3.42}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \omega_{j\ m+1} = 0, \tag{3.43}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i\ m+1} \wedge \omega_{m+1\ j}, \tag{3.44}$$

$$d\omega_{i\ m+1} = \sum_{k=1}^{m} \omega_{ik} \wedge \omega_{k\ m+1} \tag{3.45}$$

である．このとき，(3.39) は

$$\omega_{j\ m+1} = \sum_{i=1}^{m} h_{ji}\omega_i, \qquad h_{ji} = h_{ij} \tag{3.46}$$

となる．よって，超曲面 M の第 2 基本形式は

$$\mathrm{II} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \omega_{i\ m+1} = \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij}\omega_i\omega_j \tag{3.47}$$

とかくことができる．ここで，(3.44) と (3.45) はそれぞれガウスの方程式とコダッチの方程式である．ガウスの方程式 (3.44) に (3.46) を代入すれば

$$R_{ijkl} = h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl} \tag{3.48}$$

となる．これは通常のガウスの方程式である．

(3.46) をコダッチの方程式に代入すると

$$\sum_{j=1}^{m} \left(dh_{ij} - \sum_{k=1}^{m} h_{ik}\omega_{jk} - \sum_{k=1}^{m} h_{kj}\omega_{ik} \right) \wedge \omega_j = 0$$

が得られ，カルタンの補題より

$$\begin{cases} dh_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} h_{ik}\omega_{jk} - \sum_{k=1}^{m} h_{kj}\omega_{ik} = \sum_{k=1}^{m} h_{ijk}\omega_k, \\ h_{ijk} = h_{ikj} \end{cases} \tag{3.49}$$

が成り立つ．

ここで

$$\begin{cases} dh_{ij} = \sum_{k=1}^{m} h_{ij,k}\omega_k, \\ \omega_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ijk}\omega_k \end{cases} \tag{3.50}$$

とおくと，

$$h_{ijk} = h_{ij,k} - \sum_{l=1}^{m} h_{il}\Gamma_{jlk} - \sum_{l=1}^{m} h_{lj}\Gamma_{ilk} \tag{3.51}$$

が得られ，したがって，コダッチの方程式は

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = \sum_{l=1}^{m} (h_{il}\Gamma_{jlk} + h_{lj}\Gamma_{ilk} - h_{il}\Gamma_{klj} - h_{lk}\Gamma_{ilj}) \tag{3.52}$$

となる．

定理 3.2 の系として，次の $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面の基本定理が得られる．

定理 3.3 2 次微分形式

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{m} (\omega_i)^2, \qquad \mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij}\omega_i\omega_j \tag{3.53}$$

が存在するとしよう．ここで，ω_i $(1 \leq i \leq m)$ は m 変数の 1 次独立な 1 次微分形式であり，$h_{ij}=h_{ji}$ もこれら m 変数の関数である．このとき，I と II を第 1 基本形式と第 2 基本形式としてそれぞれもつ $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面が存在するための必要十分条件は，I と II がガウスの方程式 (3.48) とコダッチの方程式 (3.52) をみたすことである．ここで，Γ_{ijk} は I におけるレビ・チビタ接続であり，R_{ijkl} はその曲率テンソルである．さらに，$\mathbb{R}^{m+1}$ の 2 つの超曲面は剛体運動で関係づけられている．

§6-4 曲 面 論

前節では，動標構を用いて，第 1 基本形式と第 2 基本形式は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面上の完全不変系であり，ガウス・コダッチの方程式は I と II をみたす積分可能条件であることを示した．超曲面は幾何学的に豊富な内容をもっているものなので，ここでは $\mathbb{R}^3$ の超曲面をその具体例として議論しよう．

$x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな曲面としよう．M の座標近傍 U の局所座

標 u^1, u^2 をとると，曲面 x はパラメーター付き方程式

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \qquad 1 \leq i \leq 3 \tag{4.1}$$

で表せる．x は埋め込みなので，行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

の階数は 2 であり，x は 1 対 1 写像である．

M 上に，e_1, e_2 は M の接ベクトル，e_3 は M の法線ベクトル，(e_1, e_2, e_3) の向きは $\mathbb{R}^3$ と同じ向きとなるようなダルブー標構 $(x; e_1, e_2, e_3)$ をとろう．このとき，(e_1, e_2) は M の向きを決める．ダルブー標構に対応する相対成分を ω_i, ω_{ij} とする．すなわち

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \qquad \omega_3 = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} de_1 = \qquad\quad \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3, \\ de_2 = \omega_{21} e_1 \qquad\quad + \omega_{23} e_3, \\ de_3 = \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

が成り立つ．ここで，ω_i, ω_{ij} はパラメーター u^1, u^2 の微分形式である．ここで構造方程式は

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \end{cases} \tag{4.4}$$

$$0 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}, \tag{4.5}$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} \end{cases} \tag{4.7}$$

である．

§6-3 に述べたように，(4.6), (4.7) はそれぞれ曲面のガウスの方程式とコダッチの方程式である．これらの方程式には多くの情報が含まれている．曲面の幾

何学の研究は，その曲面の特性に依存するのである．

M の第 1 基本形式は

$$\mathrm{I} = dx \cdot dx = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 \tag{4.8}$$

であり，面積要素は

$$dA = \omega_1 \wedge \omega_2 \tag{4.9}$$

である．これらは両方ともダルブー標構の変換に関して不変である．

カルタンの補題を用いると，(4.5) より

$$\begin{cases} \omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, \\ \omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \qquad h_{12} = h_{21} \end{cases} \tag{4.10}$$

が得られる．内積を用いると，**第 2，第 3 基本形式**

$$\mathrm{II} = d^2x \cdot e_3 = -dx \cdot de_3 = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}, \tag{4.11}$$

または，

$$\mathrm{II} = h_{11}(\omega_1)^2 + 2h_{12}\omega_1\omega_2 + h_{22}(\omega_2)^2 \tag{4.12}$$

と

$$\mathrm{III} = de_3 \cdot de_3 = (\omega_{13})^2 + (\omega_{23})^3 \tag{4.13}$$

が得られる．

M の固定した点 $x \in M$ に対して，比 $\omega_1 : \omega_2$ により x における M 上の接方向 v が得られる．明らかに，

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \tag{4.14}$$

は (x, v) の関数であり，方向 v に沿っての点 x における M の**法曲率**とよばれる．法曲率の幾何学的な意味は容易にわかる．接方向 v と法線 e_3 で張られる平面と M との交線は v に沿う曲面 M の**法断面曲線**である．このとき，点 x における法曲率 κ_n は，点 x における法断面曲線の曲率に等しい．

第 2 基本形式 II は，曲面 M の接空間の線形変換場とみなすこともできる．方程式 (4.3) の 3 番目の式は，M 上の接ベクトル値の 1 次微分形式とみなすことができるので，各点 $x \in M$ で $T_x(M)$ から $T_x(M)$ への線形変換 W を定義する．すなわち，任意の $X \in T_x(M)$ に対して，

$$W(X) = -\langle X\,,\, de_3\rangle = \omega_{13}(X)e_1 + \omega_{23}(X)e_2 \tag{4.15}$$

と定義する．この定義はダルブー標構によらないものである．変換 W は x における曲面の接平面の**ワインガルテン変換**とよばれる．(4.10) より

$$\begin{cases} W(e_1) = h_{11}e_1 + h_{12}e_2, \\ W(e_2) = h_{21}e_1 + h_{22}e_2 \end{cases} \tag{4.16}$$

が成り立つ．よって，基底 (e_1, e_2) に関して変換 W の行列は，第 2 基本形式 II の係数行列 (h_{ij}) に一致する．$h_{ij} = h_{ji}$ なので，W は自己随伴変換である．要するに，任意の $X, Y \in T_x(M)$ に対して，

$$\begin{aligned} W(X) \cdot Y &= \omega_{13}(X)\omega_1(Y) + \omega_{23}(X)\omega_2(Y) \\ &= \omega_1(X)\omega_{13}(Y) + \omega_2(X)\omega_{23}(Y) \\ &= X \cdot W(Y) \end{aligned} \tag{4.17}$$

が成立する．

線形代数の結果によると，線形変換 W は相異なる二つの実固有値 κ_1, κ_2 をもち，それらに対応する二つの固有ベクトルは互いに直交する．固有値は 2 次方程式

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \kappa & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - 2H\kappa + K = 0 \tag{4.18}$$

をみたす．ここで，

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}), \qquad K = h_{11}h_{22} - {h_{12}}^2 \tag{4.19}$$

である．H と K は両方ともダルブー標構によらないものであり，それぞれ曲面 M の**平均曲率**および**全曲率**とよばれる．

方程式 (4.18) の解は

$$\kappa_1, \kappa_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K} \tag{4.20}$$

であり，よって，κ_1, κ_2 は M 上の連続関数である．したがって，

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \qquad K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \tag{4.21}$$

が成り立つ．点 x における M 上の変換 W の固有ベクトルが e_1, e_2 であるような M 上の特殊なダルブー標構 $(x; e_1, e_2, e_3)$ を選ぼう．このとき，

$$h_{11} = \kappa_1, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = \kappa_2$$

となり，方程式 (4.10) は

$$\omega_{13} = \kappa_1\omega_1, \qquad \omega_{23} = \kappa_2\omega_2 \tag{4.22}$$

とかけ，第 2 基本形式 II は

$$\mathrm{II} = \kappa_1(\omega_1)^2 + \kappa_2(\omega_2)^2 \tag{4.23}$$

となる．したがって，接方向 v における法曲率 κ_n は

$$\kappa_n = \kappa_1\cos^2\theta_1 + \kappa_2\sin^2\theta_1 \tag{4.24}$$

とかける．ここで，θ_1 は v と e_1 のなす角である．これより，κ_1, κ_2 は方向 e_1, e_2 における曲面の法曲率であることがわかる．点 x における変換 W の固有ベクトル e_1, e_2 を点 x における曲面の**主方向**とよび，対応する固有値 κ_1, κ_2 を点 x における曲面の**主曲率**とよぶ．(4.24) は有名な**オイラーの公式**にほかならない．

ここで $\kappa_1 \geq \kappa_2$ とすると，(4.24) は

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1)\sin^2\theta_1 \\ &= (\kappa_1 - \kappa_2)\cos^2\theta_1 + \kappa_2\end{aligned}$$

とかけ，

$$\kappa_1 \geq \kappa_n \geq \kappa_2 \tag{4.25}$$

が成り立つ．したがって，主方向というのは，法曲率が極値をとる方向であり，主曲率というのは，法曲率の最大値と最小値である．点 x で $\kappa_1 = \kappa_2$ ならば，この点における法曲率の値は任意の方向で同じであり，このような点を曲面 M の**臍点**とよぶ．この臍点においては，法曲率が極値をとる方向が一意的には定まらない．

点 $x \in M$ が臍点ではない場合は，

$$\kappa_1 \neq \kappa_2, \quad \text{すなわち,} \quad H^2 - K^2 \neq 0$$

の成り立つような x の近傍 U が存在する．さらに，(4.20) より，この近傍では κ_1, κ_2 は滑らかな関数であることがわかり，したがって，次の定理が成り立つ．

定理 4.1 M を $\mathbb{R}^3$ の滑らかな曲面としよう．このとき，主曲率 κ_1, κ_2 は M 上の連続関数であり，臍点ではない M の点の集合は M の開集合となる．$\kappa_1 > \kappa_2$ の場合に，κ_1, κ_2 はこの開集合上の滑らかな関数である．

リーマン幾何学の基本定理より，1 次微分形式 ω_{12} は方程式 (4.4) と歪対称性 $\omega_{12}+\omega_{21}=0$ より一意的に決まる．ここで，ω_{12} を直接計算する．

$$\omega_{12}=-\omega_{21}=p\omega_1+q\omega_2 \tag{4.26}$$

とおき，(4.4) に代入すれば，

$$\begin{cases} d\omega_1=p\omega_1\wedge\omega_2, \\ d\omega_2=q\omega_1\wedge\omega_2 \end{cases} \tag{4.27}$$

が成り立つ．p と q は $d\omega_1, d\omega_2$ それぞれの係数なので，これらを $\omega_1\wedge\omega_2$ を用いて表すことができる．微分形式 ω_{12} より，曲面 M のレビ・チビタ接続

$$\begin{cases} De_1=\omega_{12}e_2, \\ De_2=-\omega_{12}e_1 \end{cases} \tag{4.28}$$

が得られる．(4.6) より

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= -\omega_{13}\wedge\omega_{23} \\ &= -(h_{11}h_{22}-{h_{12}}^2)\omega_1\wedge\omega_2, \\ &= -K\omega_1\wedge\omega_2 \end{aligned} \tag{4.29}$$

が成り立つ．全曲率 $K=h_{11}h_{22}-{h_{12}}^2$ は曲面 M の第 2 基本形式 II で決まるものの，上記の式より K は $d\omega_{12}, \omega_1, \omega_2$ で決まることがわかる．すなわち，K は M の第 1 基本形式で決まり，曲面 M の本質的な不変量である．したがって，曲面 M の全曲率 K は，その第 1 基本形式を保存する $\mathbb{R}^3$ の変換に関して不変である．この事実は Gauss により発見され，驚愕(きょうがく)定理 (Theorema egregium) とよばれた．

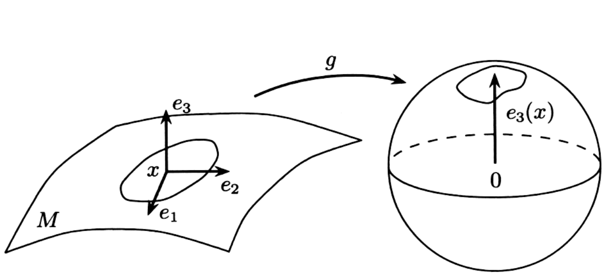


図 12

Gauss は曲面を研究するにあたって，任意の点 $x \in M$ に対して

$$g(x) = e_3(x) \tag{4.30}$$

が成り立つような写像 $g : M \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ をよく用いた．今日，この写像は**ガウス写像** (図 12 参照) とよばれている．明らかに，(e_1, e_2, e_3) は点 $g(x)$ における S^2 上の直交標構とみなせる．ここで

$$de_3 = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2$$

が成り立つので，第 3 基本形式

$$\mathrm{III} = de_3 \cdot de_3 = (\omega_{31})^2 + (\omega_{32})^2$$

は，ガウス写像を用いて S^2 の第 1 基本形式を曲面に引き戻した 2 次微分形式である．同様に，

$$g^* d\sigma = \omega_{31} \wedge \omega_{32} \tag{4.31}$$

が成り立つ．ここで $d\sigma$ は S^2 の面積要素である．(4.29) より

$$K = \frac{g^* d\sigma}{dA} \tag{4.32}$$

が成り立つ．これより，全曲率 K の幾何学的な解釈が得られる．すなわち，曲面 M 内の領域 D のガウス写像に関する像を D' とし，D の面積を A，D' の面積を A' としよう．このとき，

$$|K| = \lim_{D \to P} \frac{A'}{A}, \qquad P \in M$$

が成り立つ．したがって，全曲率 K はある点における曲面の曲がり具合を測るものである．

§5-4 では，内在的な方法を用いてガウス–ボンネの公式を証明した．すなわち，コンパクトで，向き付けられた 2 次元リーマン多様体 M では

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \, dA = \chi(M) \tag{4.33}$$

が成り立つ．この式の研究やその一般化は数学のいくつかの分野の発展を刺激したのである．近年では，曲面の大域的な性質の研究が盛んである．大域微分幾何学の多くの基礎的な性質の載っている Chern 1967 (a) を読者にお勧めする．ここで，球面の特徴を記述するリーブマンの定理を紹介しよう．

補題 1　定数である全曲率 K をもつコンパクトな 2 次元曲面 M に対して，K は正である．

証明　関数 $r(x) = x \cdot x$ を考えよう．M がコンパクトなので，$r(x)$ は $x = x_0$ でその最大値をとるような点 $x_0 \in M$ が必ずある．したがって，

$$dr\big|_{x_0} = 0, \qquad d^2r\big|_{x_0} \leq 0 \tag{4.34}$$

が成り立つので，

$$\frac{1}{2}dr = x \cdot dx = (x \cdot e_1)\omega_1 + (x \cdot e_2)\omega_2$$

となり，

$$x \cdot e_1\big|_{x_0} = x \cdot e_2\big|_{x_0} = 0 \tag{4.35}$$

が成り立つ．すなわち，半径ベクトル x_0 は x_0 で曲面 M の法線ベクトルである．

$x \cdot e_i$ $(i = 1, 2)$ を微分すれば，

$$\begin{aligned} d(x \cdot e_i) &= dx \cdot e_i + x \cdot de_i \\ &= \omega_i + \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}(x \cdot e_k) \end{aligned}$$

となる．一方，(4.35) より

$$d(x \cdot e_i)\big|_{x_0} = [\omega_i + \omega_{i3}(x \cdot e_3)]_{x_0} \tag{4.36}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{1}{2}\, d^2r\big|_{x_0} &= [d(x \cdot e_1)\omega_1 + d(x \cdot e_2)\omega_2]_{x_0} \\ &= \left[(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2\right]_{x_0} + (\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23})_{x_0} \cdot (x \cdot e_3)_{x_0} \end{aligned} \tag{4.37}$$

となる．$[(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2]_{x_0} > 0$ で，x_0 が M の原点 O よりもっとも遠い点なので，

$$x_0 \neq 0, \qquad x_0 || e_3, \qquad x_0 \cdot e_3 \neq 0$$

である．したがって，x_0 における M の第 2 基本形式

$$\mathrm{II} = (\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23})x_0$$

は固定した 2 次形式であり，したがって，その係数の行列式は

$$K(x_0) = (h_{11}h_{22} - {h_{12}}^2)x_0 > 0$$

をみたす．よって，M の全曲率 K は定数であると仮定したので，それは正の定数となる．　□

補題 2　任意の点が臍点である多様体 M は，球面あるいは平面である．

証明 点 x は M の臍点であることから，x におけるワインガルデン変換の固有方向は定義できない．よって，

$$de_3 + \kappa\, dx = 0 \tag{4.38}$$

が成り立つ．ここで，e_3 は曲面の法線ベクトルであり，κ は主曲率である．M の各点は臍点なので，上記の式は M のいたるところで成り立ち，$\kappa = H$ は M 上の滑らかな関数である．(4.38) を外微分すれば，

$$d\kappa \wedge dx = (d\kappa \wedge \omega_1)e_1 + (d\kappa \wedge \omega_2)e_2 = 0,$$
$$d\kappa \wedge \omega_1 = 0, \qquad d\kappa \wedge \omega_2 = 0$$

となる．$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ より

$$d\kappa = 0, \qquad \kappa = \text{定数} \tag{4.39}$$

が成り立つ．

ここで場合分けをして考える．

1) $\kappa = 0$ の場合には，(4.38) より

$$de_3 = 0, \qquad e_3 = e_3^0 \qquad (\text{一定のベクトル})$$

となり，

$$\begin{aligned} d(x \cdot e_3^0) &= dx \cdot e_3^0 = 0, \\ x \cdot e_3^0 &= \text{定数} \end{aligned} \tag{4.40}$$

が成り立つ．したがって，M は $\mathbb{R}^3$ の平面である．

2) $\kappa \neq 0$ の場合には，(4.38) より

$$d\left(\frac{e_3}{\kappa} + x\right) = 0$$

となり，

$$\begin{aligned} \frac{e_3}{\kappa} + x &= x_0 \qquad (\text{一定のベクトル}), \\ (x - x_0)^2 &= \frac{1}{\kappa^2} \end{aligned} \tag{4.41}$$

が成り立つ．

したがって，M は中心 x_0，半径 $1/|\kappa|$ の球面であることがわかる． □

定理 4.2 (リーブマンの定理) M を一定な全曲率 K をもつ $\mathbb{R}^3$ のコンパクトで連結な曲面としよう．このとき M は球面である．

証明 補題 1 より，K は必ず正の定数である．κ_1, κ_2 は M の主曲率で $\kappa_1 \geq \kappa_2$ とすると，$K = \kappa_1\kappa_2 > 0$ となる．定理 4.1 より，κ_1 は M 上の連続関数である．M はコンパクトなので，κ_1 は $x_0 \in M$ でその最大値をとるとしよう．よって，κ_2 は x_0 で最小値をとる．

次の場合分けを行う．

1)　$\kappa_1(x_0) = \kappa_2(x_0)$ の場合．　$\kappa_1(x_0) \geq \kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \kappa_2(x_0)$ より，M の各点では，$\kappa_1 = \kappa_2 = \pm\sqrt{K}$ となる．よって，補題 2 より M は球面となる．

2)　$\kappa_1(x_0) > \kappa_2(x_0)$ の場合．　x_0 は臍点ではない．すると，U に臍点が一つもないような点 x における近傍 U が存在する．したがって，主曲率 κ_1, κ_2 に対応するお互いに直交する主方向が e_1, e_2 であるような U 上のダルブー標構 $(x; e_1, e_2, e_3)$ がとれる．したがって，

$$\omega_{13} = \kappa_1\omega_1, \qquad \omega_{23} = \kappa_2\omega_2 \tag{4.42}$$

となる．$\omega_{12} = p\omega_1 + q\omega_2$ とし，

$$dp = p_1\omega_1 + p_2\omega_2, \qquad dq = q_1\omega_1 + q_2\omega_2 \tag{4.43}$$

とおく．このとき，

$$d\omega_{12} = (q_1 - p_2)\omega_1 \wedge \omega_2 \tag{4.44}$$

が成り立つ．ガウスの方程式 (4.29) と比較すれば，

$$K = -(q_1 - p_2) \tag{4.45}$$

が得られる．

(4.42) を外微分すれば，コダッチの方程式 (4.7) を用いると

$$d\kappa_1 \wedge \omega_1 + p\kappa_1\omega_1 \wedge \omega_2 = p\kappa_2\omega_1 \wedge \omega_2,$$
$$d\kappa_2 \wedge \omega_2 + q\kappa_2\omega_1 \wedge \omega_2 = q\kappa_1\omega_1 \wedge \omega_2$$

が得られる．したがって，

$$\begin{cases} (d\kappa_1 - p(\kappa_1 - \kappa_2)\omega_2) \wedge \omega_1 = 0, \\ (d\kappa_2 - q(\kappa_1 - \kappa_2)\omega_1) \wedge \omega_2 = 0 \end{cases} \tag{4.46}$$

が成り立つ．$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = K =$ 定数 > 0 なので，$\kappa_2 = K/\kappa_1$ となる．よって，

$$d\kappa_2 = -\frac{K}{\kappa_1^2}d\kappa_1 \tag{4.47}$$

が成り立ち，これを (4.46) の第 2 式に代入すると，

$$\left(d\kappa_1 + \frac{q\kappa_1^2}{K}(\kappa_1 - \kappa_2)\omega_1\right) \wedge \omega_2 = 0 \tag{4.48}$$

が得られる．(4.48) と (4.46) の第 1 式を用いると，

$$d\kappa_1 = -\frac{q\kappa_1^2}{K}(\kappa_1 - \kappa_2)\omega_1 + p(\kappa_1 - \kappa_2)\omega_2 \tag{4.49}$$

が成り立つ．

定理の仮定より，κ_1 は x_0 でその最大値をとる．したがって，

$$d\kappa_1\big|_{x_0} = 0, \qquad d^2\kappa_1\big|_{x_0} \leq 0 \tag{4.50}$$

が成り立ち，さらに，x_0 では $\kappa_1 \neq 0$，$\kappa_1 - \kappa_2 \neq 0$ となる．したがって，

$$p(x_0) = q(x_0) = 0 \tag{4.51}$$

となる．(4.49) を外微分し，その結果を点 x_0 において評価すると，

$$\begin{aligned} 0 \geq d^2\kappa_1\big|_{x_0} = \Bigg[&-\frac{\kappa_1^2}{K}(\kappa_1 - \kappa_2)q_1(\omega_1)^2 + (\kappa_1 - \kappa_2)p_2(\omega_2)^2 \\ &+ \left(-\frac{\kappa_1^2}{K}q_2(\kappa_1 - \kappa_2) + (\kappa_1 - \kappa_2)p_1\right)\omega_1\omega_2\Bigg]_{x_0} \end{aligned} \tag{4.52}$$

が成り立つ．ここで，ω_1，ω_2 は任意の実数値としてよい．点 x_0 において

$$K > 0, \qquad \kappa_1 - \kappa_2 > 0$$

となる．(4.52) の右辺の 2 次形式を方向 e_1, e_2 に沿って値をとらせると，

$$-q_1(x_0) \leq 0, \qquad p_2(x_0) \leq 0 \tag{4.53}$$

が得られる．これを (4.45) に代入すると，

$$K(x_0) \leq 0$$

となり，$K > 0$ と矛盾する．したがって，$\kappa_1(x_0) > \kappa_2(x_0)$ の場合はありえない． □

7

複素多様体

§7-1　複素多様体

複素多様体の定義は，形式的には実多様体と同様であるが，複素構造は多様体に多くの強い制限を課すので，多くの豊かな幾何学的な性質が得られる．

$\mathbb{C}$ を複素数体とし，$\mathbb{C}_m$ を m 組 $(z^1, \ldots, z^m)$ $(z^i \in \mathbb{C})$ の複素 m 次元ベクトル空間としよう．

定義 1.1　M を可算基をもつハウスドルフ空間とする．$\{U_\alpha\}$ は M の開被覆であり，任意の U_α, U_β $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing)$ に対して

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が $\mathbb{C}_m$ の二つの開集合間の正則写像であるという条件をみたすような，U_α から $\mathbb{C}_m$ [1] の開集合への同相写像 φ_α からできる M 上の座標系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が存在するとき，M を m **次元複素多様体**とよぶ．

$(z^1, \ldots, z^m)$ $(z^i \in \mathbb{C})$ を U_α 上の局所座標系とし，$(w^1, \ldots, w^m)$ $(w^i \in \mathbb{C})$ を U_β 上の局所座標系としよう．$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ のとき，写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は局所座標を用いて

$$w^k = w^k\left(z^1, \ldots, z^m\right), \qquad 1 \leq k \leq m \tag{1.1}$$

---

1)　$z^i = x^i + i \cdot y^i$ としよう．このとき，$\mathbb{C}_m$ は実 $2m$ 組 $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m)$ の $2m$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^{2m}$ とみなせる．$\mathbb{C}_m$ の位相幾何学的な構造は $\mathbb{R}^{2m}$ の構造と一致する．明らかに，$\mathbb{C}_m$ の部分集合族

$$\left\{ (z^1, \ldots, z^m) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} (z^j - z_0^j)(\bar{z}^j - \bar{z}_0^j) < r,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0 \right\}$$

は $\mathbb{C}_m$ の位相基となる．

とかける．よって，写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の正則性は各関数 $w^k\left(z^1,\ldots,z^m\right)$ が $\mathbb{C}_m$ の開集合 $\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ 上で正則であるという意味である．

ここで，正則関数の定義は次で与えられる．U を $\mathbb{C}_m$ の開集合とし，座標 z^k は $z^k = x^k + iy^k$ とする．f を滑らかな複素数値関数

$$f(z^1,\ldots,z^m) = g(x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots,y^m) + ih(x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots,y^m) \tag{1.2}$$

としよう．ここで**コーシー–リーマン条件**

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial h}{\partial y^k}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y^k} = -\frac{\partial h}{\partial x^k}, \qquad 1 \le k \le m \tag{1.3}$$

をみたせば，f を U 上の**正則関数**とよぶ．このとき，次の三つの条件は同値である．

1) f は U 上の正則関数である，
2) 任意の点 $a \in U$ に対して，f が V 上で収束級数

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_m=0}^{\infty} c_{k_1\cdots k_m}\left(z^1-a^1\right)^{k_1}\cdots\left(z^m-a^m\right)^{k_m} \tag{1.4}$$

と表せるような近傍 $V \subset U$ が存在する，

3) 複素微分 $\dfrac{\partial f}{\partial z^k}$ $(1 \le k \le m)$ が U 上で存在する．

写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は正則で，かつ $\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ から $\varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ への同相写像でもあるので

$$\frac{\partial\left(w^1,\ldots w^m\right)}{\partial\left(z^1,\ldots,z^m\right)} \neq 0 \tag{1.5}$$

が成り立つ．

定義 1.2 M と N をそれぞれ m 次元と n 次元複素多様体とし，$f: M \longrightarrow N$ を連続写像としよう．任意の点 $p \in M$ に対して，f が U 上で局所座標を用いて

$$w^k = w^k\left(z^1,\ldots,z^m\right), \qquad 1 \le k \le n \tag{1.6}$$

とかけるような近傍 U が存在するとき (ここで w^k は正則関数である)，f を**正則写像**とよぶ．

$f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ を複素多様体 M 上の正則関数としよう．最大値の原理より，f の絶対値が，$p_0 \in M$ の近傍 U 上で p_0 において最大値をとる，すなわち

$|f(p)| \leq |f(p_0)|$ $(p \in U)$ が成り立つとき，U 上で

$$f(p) = f(p_0)$$

が成り立つ．

M をコンパクトで連結な複素多様体としよう．$|f(p)|$ $(p \in M)$ が M 上の連続関数ならば，最大値を M 上でとる．上記の議論より，M 上の正則関数 f は必ず一定値となる．したがって，コンパクトで連結な複素多様体 M より $\mathbb{C}_n$ への正則写像 $f : M \longrightarrow \mathbb{C}_n$ は，M を $\mathbb{C}_n$ の一点に写すことがわかる．

例 1. $\mathbb{C}_m$ は m 次元複素多様体である．$\mathbb{C}_1$ は**ガウス複素平面**とよばれる．

例 2 (m **次元複素射影空間** $\mathbb{C}P_m$)**.** $\mathbb{C}_{m+1} - \{0\}$ 上の同値関係を以下で定義する．

$$\left(z^0, z^1, \ldots, z^m\right) \sim \left(w^0, w^1, \ldots, w^m\right)$$

となるための必要十分条件は

$$\left(z^0, z^1, \ldots, z^m\right) = \lambda \left(w^0, w^1, \ldots, w^m\right) \tag{1.7}$$

が成り立つような，0 ではない複素数 λ が存在することである．

これが，同値関係であることは容易に示される．このとき，m 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P_m$ は商空間 $(\mathbb{C}_{m+1} - \{0\})/\sim$ である．この空間の元を $\left[z^0, z^1, \ldots, z^m\right]$ としよう．$(m+1)$ 個の複素数 $(z^0, z^1, \ldots, z^m)$ を点 $\left[z^0, z^1, \ldots, z^m\right]$ の**同次座標**という．これらは，0 でない一つの因子を除いて $\mathbb{C}P_m$ の一点から決まるものである．実射影空間と同様に，$\mathbb{C}P_m$ を $(m+1)$ 個の開集合 U_j $(0 \leq j \leq m)$ で被覆できる．ここで，

$$U_j = \left\{\left[z^0, z^1, \ldots, z^m\right] \in \mathbb{C}P_m | z^j \neq 0\right\} \tag{1.8}$$

で，U_j の座標は

$${}_j\zeta^k = z^k/z^j, \qquad 0 \leq k \leq m, \quad k \neq j \tag{1.9}$$

である．${}_j\zeta^k$ は任意の複素数値としてよいので，各 U_j は $\mathbb{C}_m$ に位相同形である．$U_j \cap U_k$ 上の座標変換式は

$$\begin{cases} {}_j\zeta^h = {}_k\zeta^h / {}_k\zeta^j, & h \neq j, k, \\ {}_j\zeta^k = 1/{}_k\zeta^j \end{cases} \tag{1.10}$$

であり，これらの関数はすべて正則なので，$\mathbb{C}P_m$ は m 次元複素多様体となる．

1 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P_1$ を 2 次元実多様体とみなすとき，それを**リーマン球面**とよぶ．$\mathbb{C}P_1$ は二つの座標近傍 U_0, U_1 で被覆され，U_0 は点 $p=[0,1]$ を除いた $\mathbb{C}P_1$ なので，U_0 はガウス複素平面に位相同形である．したがって，リーマン球面は 2 次元球面 S^2 である．ここで

$$\pi\left(z^0, z^1, \ldots, z^m\right) = \left[z^0, z^1, \ldots, z^m\right] \tag{1.11}$$

となるような自然射影

$$\pi : \mathbb{C}_{m+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P_m$$

を考えよう．このとき，任意の点 $p \in \mathbb{C}P_m$ に対して，$\pi^{-1}(p)$ を $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_1 - \{0\}$ と同一視する．$\pi^{-1}(U_j)$ の座標 $\left(z^0, z^1, \ldots, z^m\right)$ の代わりに ${}_j\zeta^k = z^k/z^j$ $(0 \le k \le m, k \neq j)$ と z^j を代入すると，

$$\pi^{-1}(U_j) \cong U_j \times \mathbb{C}^*$$

となる．したがって，$\mathbb{C}_{m+1} - \{0\}$ は局所的に積構造をもち，z^j はファイバー $\pi^{-1}(p)$ における座標である．

$p \in U_j \cap U_k$ に対して，U_j と U_k は $\pi^{-1}(p)$ に，それぞれ座標系 z^j と z^k を与える．点 $x \in \pi^{-1}(p)$ では，座標 z^j と z^k との間に関係

$$z^j = z^k \cdot {}_k\zeta^j = z^k/{}_j\zeta^k \tag{1.12}$$

が成り立つ．ここで，${}_k\zeta^j : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbb{C}^*$ は $U_j \cap U_k$ 上の 0 ではない正則な関数である．したがって，$\mathbb{C}_{m+1} - \{0\}$ は，ファイバーと構造群が両方とも $\mathbb{C}^*$ である m 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P_m$ 上の正則ファイバー束である．

$\mathbb{C}_{m+1}$ 上の方程式

$$\sum_{k=0}^{m} z^k \overline{z}^k = 1 \tag{1.13}$$

を考えよう．$\mathbb{C}_{m+1}$ を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{2(m+1)}$ とみなすと，方程式 (1.13) は $\mathbb{R}^{2(m+1)}$ 内の $(2m+1)$ 次元単位球 S^{2m+1} である．(これらの構造の間の区別をするために，以下の議論では，上付で実次元を表し，下付で複素次元を表すこととする．)

自然射影 (1.11) を S^{2m+1} に制限すると，

$$\pi : S^{2m+1} \longrightarrow \mathbb{C}P_m \tag{1.14}$$

が得られる．よって，任意の点 $p \in \mathbb{C}P_m$ に対して，原像 $\pi^{-1}(p)$ の全体は円で

ある．写像 π は S^{2m+1} の**ホップファイバーリング**とよばれる．

$m=1$ のとき，(1.14) は

$$\pi : S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P_1 \approx S^2 \tag{1.15}$$

とかける．ここで，$\mathbb{C}P_1$ は S^2 に位相同形である．これは，高次元空間より低次元空間への**本質的写像**[2)]であり，位相幾何学におけるホモトピー論の歴史的な発展に大きな影響を及ぼした．

例 3. 連立方程式

$$P_l\left(z^0, z^1, \ldots, z^m\right) = 0, \qquad 1 \leq l \leq q$$

の軌道は**代数多様体**とよばれる．ここで，P_l は $\mathbb{C}P_m$ 内の同次多項式である．例えば，方程式

$$(z^0)^2 + \cdots + (z^m)^2 = 0 \tag{1.16}$$

より得られる複素多様体は **2 次超曲面**とよばれる．W.-L. Chow の定理 (**チョウの定理**) より，$\mathbb{C}P_m$ に埋め込まれた任意のコンパクトな部分多様体は代数多様体である．

例 4 (複素トーラス). $\mathbb{C}_m$ を実 $2m$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^{2m}$ とみなそう．$\mathbb{R}^{2m}$ 内の $2m$ 個の実 1 次独立なベクトル $\{v_\alpha\}$ を選ぶと，これらは束

$$L = \left\{\sum_{\alpha=1}^{2m} n_\alpha v_\alpha,\ n_\alpha \in \mathbb{Z}\right\} \tag{1.17}$$

となる．$\mathbb{C}_m$ と L が両方とも可算群なので，商空間 $\mathbb{C}_m/L$ は m 次元複素多様体となり，m **次元複素トーラス**とよばれる．

位相的にいえば，m 次元複素トーラスは $2m$ 次元実トーラスに位相同形である．さらに，前者は複素多様体の構造をもち，したがって，多くの幾何学的な性質をもつ．例えば，$m=1$ のとき，複素トーラスより自分自身への正則写像は共形的であり，すなわち角を保存する写像である．よって，ベクトル v_1, v_2 のなす角とそれらの長さの比は正則写像のもとで不変である．

複素トーラスが，複素射影空間に正則部分多様体として埋め込まれるならば，十分大きい N に対して，非退化正則写像

$$f : \mathbb{C}_m/L \longrightarrow \mathbb{C}P_N \tag{1.18}$$

2) 一定写像 $X \longrightarrow y_0 \in Y$ にホモトープではない連続関数 $f : X \longrightarrow Y$ は**本質的** (すなわち 0 にホモトープではない) とよばれる．

が存在する．このような複素トーラスは**アーベル多様体**とよばれる．アーベル多様体の研究は，代数幾何学や数論の重要な分野となっている．

例 5 (ホップ多様体).

$$\alpha\left(z^1,\ldots,z^m\right)=2\left(z^1,\ldots,z^m\right) \tag{1.19}$$

である変換 $\alpha:\mathbb{C}_m-\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}_m-\{0\}$ を考えよう．α から生成される離散群を Δ としよう．このとき，商空間 $(\mathbb{C}_m-\{0\})/\Delta$ は m 次元複素多様体となり，これを**ホップ多様体**とよぶ．

位相的にホップ多様体は $S^{2m-1}\times S^1$ に位相同形である．このことをみるには，$\mathbb{C}_m=\mathbb{R}^{2m}$ における半径 1 と 2 の同心球 $S^{2m-1}(1)$, $S^{2m-1}(2)$ の間にある円環を考える (図 13 参照)．球と半径との交差より得られる線分の両端点を同一視することによりホップ多様体に位相同形である空間が得られる．

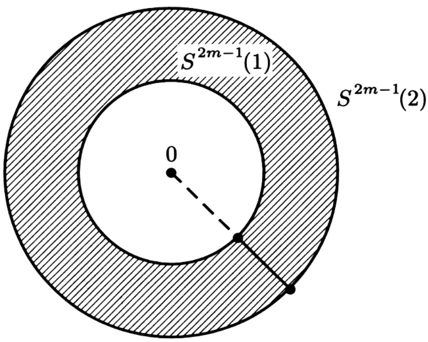


図 13

ホップ多様体は，非代数多様体のもっとも簡単な例である．

例 6. リーマン計量

$$ds^2=(\omega_1)^2+(\omega_2)^2 \tag{1.20}$$

をもつ 2 次元有向曲面 M を考えよう．ds^2 を解析的に表すと

$$ds^2=(\omega_1+i\omega_2)(\omega_1-i\omega_2)$$

となる．微分形式 $\omega_1+i\omega_2=0$ は

$$\lambda(\omega_1+i\omega_2)=dz \tag{1.21}$$

となるような積分因数 λ をもつ．したがって，

$$ds^2 = \frac{1}{|\lambda|^2} dz d\overline{z} \tag{1.22}$$

が成り立つ．

$z = x + iy$ とおくと，

$$ds^2 = \frac{1}{|\lambda|^2}(dx^2 + dy^2) \tag{1.23}$$

となる．したがって，曲面上のリーマン計量は，局所的にはつねにユークリッド計量に共形的に対応する．リーマン計量 ds^2 を (1.23) の形にかけるために用いたパラメーター x, y を，**等温パラメーター**あるいは**等温媒介変数**という．ds^2 が滑らかのとき，コーン–リヒテンシュタインの定理より (S. S. Chern 1955 を参照)，曲面の向きは

$$dx \wedge dy = \frac{1}{2} dz \wedge d\overline{z} \tag{1.24}$$

によって決まる．さらに，ds^2 は，

$$ds^2 = \frac{1}{|\mu|^2} dw d\overline{w} \tag{1.25}$$

とかけるとき，dw は，dz あるいは $d\overline{z}$ の倍数である．複素座標 z と w より曲面の同じ向きが得られると，dw は dz の倍数である．このとき，w は z の正則関数である．したがって，任意の 2 次元有向曲面は必ず 1 次元複素多様体となる複素構造をもつ．

1 次元複素多様体は**リーマン面**とよばれ，1 変数関数論での研究主題である．

§7-2　ベクトル空間の複素構造

複素多様体の勉強を進めるには，まず，ベクトル空間の複素構造を知らなければならない．

定義 2.1　V を m 次元実ベクトル空間としよう．

$$J^2 = -\,\mathrm{id} \;: V \longrightarrow V \tag{2.1}$$

をみたす線形変換 $J : V \longrightarrow V$ を V 上の**複素構造** J という．

注意. J はただベクトルを i 倍するものである. $i \cdot X = JX$ とおくと, ベクトル空間 V は複素数体上のベクトル空間となる. 逆に, V は複素ベクトル空間であり, $JX = i \cdot X$ とおくと, J は実ベクトル空間とみなした V 上の複素構造である.

V^* を V の双対空間としよう. このとき, V 上の複素構造 J に, 次の式をみたす V^* 上の (同じ記号で表す) 複素構造 J が誘導される. 任意の $\alpha \in V^*$, $x \in V$ に対して,

$$\langle x\,,\, J\alpha \rangle = \langle Jx\,,\, \alpha \rangle \tag{2.2}$$

が成り立つ. このとき明らかに $J^2\alpha = -\alpha$ となり, よって J は V^* 上の複素構造となる.

V の基底 e_r $(1 \leq r \leq m)$ を選び, 基底 $\{e_r\}$ に関する複素構造 J の行列を $A = \left(a_i^j\right)$ としよう. すなわち,

$$J \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

とする. ここで, a_i^j は実数である. $J^2 = -\,\mathrm{id}$ より

$$A^2 = -I \tag{2.4}$$

となる. ここで I は $m \times m$ 型の単位行列である. このとき, A の固有値は $\pm i$ であり, 二つの組で得られるものである. よって, V の次元は偶数である. そこで $m = 2n$ としよう.

V^* の $\{e_r, 1 \leq r \leq 2n\}$ の双対基底底を $\{e^{*r}, 1 \leq r \leq 2n\}$ とおくと, (2.2) より

$$J \begin{pmatrix} e^{*r} \\ \vdots \\ e^{*2n} \end{pmatrix} = {}^t A \cdot \begin{pmatrix} e^{*1} \\ \vdots \\ e^{*2n} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

が得られる. すなわち, V^* 上の基底 $\{e^{*r}, 1 \leq r \leq 2n\}$ に関する複素構造 J の行列は ${}^t A$ であり, A と同じ固有値をもつ.

A の固有値は虚数なので, V^* の複素化空間 $V^* \otimes \mathbb{C}$ を考えると便利である. $V^* \otimes \mathbb{C}$ は V 上の複素数値線形関数の全体であり, したがって, m 次元複素ベ

クトル空間である．$V^* \otimes \mathbb{C}$ の任意の元 λ に対して，

$$\lambda = \alpha + i\beta \tag{2.6}$$

が成り立つ．ここで $\alpha, \beta \in V^*$ である．明らかに，V^* の基底は $V^* \otimes \mathbb{C}$ の基底であり，V^* 上の複素構造 J は

$$J\lambda = J\alpha + iJ\beta \tag{2.7}$$

とおくと，$V^* \otimes \mathbb{C}$ 上の複素構造に拡張できる．

$V^* \otimes \mathbb{C}$ は複素ベクトル空間で，複素構造 J の固有値は $\pm i$ であるので，固有値 $\pm i$ に対応する固有ベクトルを考えよう．複素構造 J の固有値 i に対応する $V^* \otimes \mathbb{C}$ 上の固有ベクトルは **(1,0) 型の元**とよばれ，$-i$ に対応するものは **(0,1) 型の元**とよばれる．$V^* \otimes \mathbb{C}$ の (1,0) 型の元の全体は，$V_{\mathbb{C}}$ と表す $V^* \otimes \mathbb{C}$ の複素部分空間となるものである．$V^* \otimes \mathbb{C}$ の (0,1) 型の元の全体は，複素共役空間 $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ で表される $V^* \otimes \mathbb{C}$ の複素部分空間である．複素共役変換では，空間 $V_{\mathbb{C}}$ と $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ との間の 1 対 1 対応がある．事実，任意の $\lambda = \alpha + i\beta \in V_{\mathbb{C}}$ に対して，(2.7) より

$$J\lambda = J\alpha + iJ\beta = i\,(\alpha + i\beta) = -\beta + i\alpha$$

となり，よって

$$J\alpha = -\beta, \qquad J\beta = \alpha \tag{2.8}$$

が得られる．よって，

$$J\overline{\lambda} = J\,(\alpha - i\beta) = -i\,(\alpha - i\beta) = -i\overline{\lambda}$$

が成り立つ，すなわち $\overline{\lambda} \in \overline{V}_{\mathbb{C}}$ となる．そして $V_{\mathbb{C}} \cap \overline{V}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ であることが容易にわかる．さらに，$V^* \otimes \mathbb{C}$ の任意の元は $(1,0)$ 型と $(0,1)$ 型の元の和で表せる．$f \in V^* \otimes \mathbb{C}$，そして

$$f_1 = \frac{1}{2}\,(f - i \cdot Jf), \qquad f_2 = \frac{1}{2}\,(f + i \cdot Jf) \tag{2.9}$$

としよう．このとき，$f = f_1 + f_2$ となり，

$$Jf_1 = i \cdot f_1, \qquad Jf_2 = -i \cdot f_2 \tag{2.10}$$

が成り立つ．すなわち，$f_1 \in V_{\mathbb{C}}$, $f_2 \in \overline{V}_{\mathbb{C}}$ となる．したがって，$V^* \otimes \mathbb{C}$ は $V_{\mathbb{C}}$ と $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ の直和でかけることがわかり，$V_{\mathbb{C}}$ と $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ は両方とも $n = m/2$ 次元の複素ベクトル空間となる．

$V_{\mathbb{C}}$ の任意の基底 λ^i $(1 \leq j \leq n)$ に対して，$\left\{\lambda^j, \overline{\lambda}^j, 1 \leq j \leq n\right\}$ は $V^* \otimes \mathbb{C}$ の基底となる．この基底に関する複素構造 J の行列の標準形は

$$\begin{pmatrix} i & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & i & & & \\ & & & -i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

である．ここで V 上の複素数値線形関数 λ^j を実部と虚部に分解しよう．次に

$$\lambda^j = e^{*j} + i \cdot e^{*n+j} \tag{2.12}$$

とおこう．ここで e^{*j} と e^{*n+j} は V^* の元である．$J\lambda^j = i \cdot \lambda^j$ なので，(2.7) より

$$Je^{*j} = -e^{*n+j}, \qquad Je^{*n+j} = e^{*j} \tag{2.13}$$

となる．さらに，(2.12) より

$$\begin{cases} e^{*j} = \dfrac{1}{2}\left(\lambda^j + \overline{\lambda}^j\right), \\ e^{*n+j} = -\dfrac{i}{2}\left(\lambda^j - \overline{\lambda}^j\right) \end{cases} \tag{2.14}$$

が得られる．したがって，V 上の $2n$ 個の実数値線形関数 e^{*j}, e^{*n+j} $(1 \leq j \leq n$ は $\left\{\lambda^j, \overline{\lambda}^j, 1 \leq j \leq n\right\})$ の複素 1 次結合でかける．逆も成り立つ．したがって，これらは $V^* \otimes \mathbb{C}$ の基底となり，V^* の基底にもなる．

$\{e_j, e_{n+j}, 1 \leq j \leq n\}$ を V 上の $\left\{e^{*j}, e^{*n+j}, 1 \leq j \leq n\right\}$ の双対基底底としよう．このとき，

$$Je_j = e_{n+j}, \qquad Je_{n+j} = -e_j \tag{2.15}$$

は容易に示される．

定理 2.1　実ベクトル空間 V 上の複素構造 J があるとき，V の次元 m は偶数である．$m = 2n$ とおくと，$\{e_j, Je_j, 1 \leq j \leq n\}$ は V 上の基底となり，二つのこのような基底は V に同じ向きを与える．

証明　基底 $\{e_j, Je_j, 1 \leq j \leq n\}$ の存在は上記の議論で示されている．このような二

つの基底は V 上に同じ向きを誘導することを示そう．上で述べたように，V^* の双対基底 $\left\{e^{*j}, -Je^{*j}, 1 \leq j \leq n\right\}$ が存在する．(2.12) の λ^j に対して

$$
\begin{aligned}
e^{*j} \wedge Je^{*j} &= -e^{*j} \wedge e^{*n+j} \\
&= -\frac{i}{2}\lambda^j \wedge \overline{\lambda}^j
\end{aligned}
$$

が得られる．よって，

$$
\bigwedge_{1\leq j\leq n}\left(e^{*j} \wedge Je^{*j}\right) = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \bigwedge_{1\leq j\leq n}\left(\lambda^j \wedge \overline{\lambda}^j\right) \tag{2.16}
$$

となる．

$V^* \otimes \mathbb{C}$ の $(1,0)$ 型の元 μ^j に対して，$V^* \otimes \mathbb{C}$ の別な基底 $\left\{\mu^j, \overline{\mu}^j, 1 \leq j \leq n\right\}$ をとると，

$$
\left(\mu^1, \ldots, \mu^n\right) = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right) \cdot G \tag{2.17}
$$

が成り立つような $n \times n$ 型の非退化複素行列 G が存在する．したがって，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mu^1 \wedge \cdots \wedge \mu^n = (\det G)\, \lambda^1 \wedge \cdots \wedge \lambda^n, \\
&\bigwedge_{1\leq j\leq n}\left(\mu^j \wedge \overline{\mu}^j\right) = |\det G|^2 \bigwedge_{1\leq j\leq n}\left(\lambda^j \wedge \overline{\lambda}^j\right)
\end{aligned}
\right. \tag{2.18}
$$

が成り立つ．上記の式より，方程式における右辺の $2n$ 次外微分形式の差は正数 $|\det G|^2$ である．よって，$\left\{\mu^j, \overline{\mu}^j, 1 \leq j \leq n\right\}$ によって決まる V の別の基底を $\{a_j, Ja_j, 1 \leq j \leq n\}$ とすると，それは V に $\{e_j, Je_j, 1 \leq j \leq n\}$ で定まる向きと同じ向きを与える．　□

つまり，V 上に複素構造 J が与えられたとき，$V^* \otimes \mathbb{C}$ は一意の直和分解 $V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{V}_{\mathbb{C}}$ をもち，これら二つの部分空間の間には複素共役による 1 対 1 対応が存在することを示した．逆に，$V^* \otimes \mathbb{C}$ のこのような直和分解は V 上の複素構造を決める．

定理 2.2　V を $2n$ 次元実ベクトル空間としよう．複素共役による $V_{\mathbb{C}}$ と $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ との間に 1 対 1 対応があるような $V^* \otimes \mathbb{C}$ の直和分解 $V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{V}_{\mathbb{C}}$ があるとき，V 上に，J に関する $(1,0)$ 型の元が $V_{\mathbb{C}}$ の元であり，J に関する $(0,1)$ 型の元が $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ の元であるような一意の複素構造 J が存在する．

証明　線形変換 $J : V^* \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V^* \otimes \mathbb{C}$ を

$$
\left\{
\begin{aligned}
&Jf = i \cdot f, && f \in V_{\mathbb{C}}, \\
&Jf = -i \cdot f, && f \in \overline{V}_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
\right. \tag{2.19}
$$

で定義しよう．このとき，$V^* \otimes \mathbb{C} = V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{V}_{\mathbb{C}}$ が成り立つので，写像 J は (2.19) によっ

て完全に決まる．λ^j $(1 \leq j \leq n)$ を $V_{\mathbb{C}}$ の基底としよう．

$$e^{*j} = \frac{1}{2}\left(\lambda^j + \overline{\lambda}^j\right), \qquad e^{*n+j} = -\frac{i}{2}\left(\lambda^j - \overline{\lambda}^j\right) \tag{2.20}$$

とおくと，e^{*j} と e^{*n+j} は V 上の実数値関数である．したがって，$\{e^{*j}, e^{*n+j}, 1 \leq j \leq n\}$ は $V^* \otimes \mathbb{C}$ の基底だけではなく，V^* の基底でもある．このとき，

$$\begin{cases} Je^{*j} = \dfrac{1}{2}\left(i \cdot \lambda^j - i \cdot \overline{\lambda}^j\right) = -e^{*n+j}, \\ Je^{*n+j} = -\dfrac{i}{2}\left(i \cdot \lambda^j + i \cdot \overline{\lambda}^j\right) = e^{*j} \end{cases} \tag{2.21}$$

が成り立つので，J は V^* の複素構造となり，よって V 上に複素構造を誘導する．(2.19) より，J に関して $V_{\mathbb{C}}$，$\overline{V}_{\mathbb{C}}$ はそれぞれ $(1,0)$ 型の元と $(0,1)$ 型の元を含む複素部分空間である．

一意性は明らかである．というのは，J が定理の仮定の条件をみたす複素構造ならば，(2.19) が成り立つからである．□

V 上の複素数値 r 線形交代関数の空間を $\Lambda^r(V^* \otimes \mathbb{C})$ とおくと，これは，直和

$$\Lambda^r(V^* \otimes \mathbb{C}) = \sum_{p+q=r} (\Lambda^p V_{\mathbb{C}}) \wedge \left(\Lambda^q \overline{V}_{\mathbb{C}}\right) \tag{2.22}$$

で表せる．$(\Lambda^p V_{\mathbb{C}}) \wedge (\Lambda^q \overline{V}_{\mathbb{C}})$ の元は

$$\sum C_{i_1 \cdots i_p, \overline{j}_1 \cdots \overline{j}_q} \lambda^{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_p} \wedge \overline{\lambda}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\lambda}^{j_q} \tag{2.23}$$

としてかけるものであり，(p,q) 次外微分形式とよばれる．

$\Pi_{p,q}$ を $\Lambda^r(V^* \otimes \mathbb{C})$ から (p,q) 次外微分形式の空間 $(\Lambda^p V_{\mathbb{C}}) \wedge (\Lambda^q \overline{V}_{\mathbb{C}})$ $(p+q = r)$ への自然射影とし，

$$\alpha_{p,q} = \prod_{p,q} \alpha \tag{2.24}$$

とおくと，

$$\alpha = \sum_{p+q=r} \alpha_{p,q} \tag{2.25}$$

が成り立つ．このとき次の性質は明らかである．

1) α が (p,q) 次外微分形式ならば，$\overline{\alpha}$ は (q,p) 次外微分形式である．
2) α が (p,q) 次外微分形式で，β が (r,s) 次外微分形式ならば，$\alpha \wedge \beta$ は $(p+r, q+s)$ 次外微分形式である．
3) $p > n$ または $q > n$ のどちらかの場合，すべての (p,q) 次外微分形式は 0 である．

注意．上記の議論では，V^* の元は V 上の実数値関数なので，V の双対空間 V^* の複素化を強調した．よって，虚数単位 i 倍の意味は明らかである．逆に，V を V^* の双対空間とみなすと，V の複素化 $V\otimes\mathbb{C}$ が考えられる．固有値 $+i$ と $-i$ に対応する $V\otimes\mathbb{C}$ の複素構造 J の固有ベクトルは $(1,0)$ 型，$(0,1)$ **型ベクトル**とそれぞれよばれる．定理 2.1 より，V の基底 $\{e_j, Je_j, 1\le j\le n\}$ が存在する．ここで

$$\begin{cases} \xi_j = \dfrac{1}{2}(e_j - iJe_j), \\ \overline{\xi}_j = \dfrac{1}{2}(e_j + iJe_j), \end{cases} \qquad 1\le j\le n \tag{2.26}$$

とおくと，$\xi_j, \overline{\xi}_j$ はそれぞれ $(1,0)$ 型ベクトルと $(0,1)$ 型ベクトルであり，$V\otimes\mathbb{C}$ の基底となる．V と V^* に複素数とその複素共役の組を考えると，定理 2.1 の $\left\{\lambda^j, \overline{\lambda}^j, 1\le j\le n\right\}$ と $\left\{\xi_j, \overline{\xi}_j, 1\le j\le n\right\}$ は互いに双対基底底である．すなわち，

$$\begin{aligned}\left\langle \xi_j\,,\,\lambda^k\right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle e_j - iJe_j\,,\, e^{*k} - iJe^{*k}\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left\langle e_j\,,\,e^{*k}\right\rangle - \left\langle Je_j\,,\,Je^{*k}\right\rangle - i\left\langle Je_j\,,\,e^{*k}\right\rangle - i\left\langle e_j\,,\,Je^{*k}\right\rangle\right\} \\ &= \delta_j^k\end{aligned}$$

となり，同様に，

$$\left\langle \overline{\xi}_j\,,\,\lambda^k\right\rangle = \left\langle \xi_j\,,\,\overline{\lambda}^k\right\rangle = 0, \qquad \left\langle \overline{\xi}_j\,,\,\overline{\lambda}^k\right\rangle = \delta_j^k$$

となる．

定義 2.2 V を複素構造 J をもつ実ベクトル空間としよう．次の三つの条件

1) 任意の $x_1, x_2, y\in V$, $a_1, a_2\in\mathbb{R}$ に対して

$$H\left(a_1x_1 + a_2x_2, y\right) = a_1H\left(x_1, y\right) + a_2H\left(x_2, y\right),$$

2) 任意の $x, y\in V$ に対して

$$H\left(y, x\right) = \overline{H\left(x, y\right)},$$

3) $H\left(Jx, y\right) = iH\left(x, y\right)$,

をみたす 2 変数複素数値の関数 $H : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ を，実ベクトル空間 V の**エルミート構造**とよぶ．

$H\left(x, y\right)$ を実部分と虚部分に分け，

$$H\left(x, y\right) = F\left(x, y\right) + iG\left(x, y\right) \tag{2.27}$$

と表すと，F と G は V 上の実数値の双 1 次線形関数となる．上記の条件 2) より

$$F(y,x)+iG(y,x)=F(x,y)-iG(x,y)$$

となるので，

$$F(y,x)=F(x,y), \qquad G(y,x)=-G(x,y) \tag{2.28}$$

が成り立つ．すなわち，F は対称双 1 次線形関数であり，G は反対称 1 次線形関数である．上記の条件 3) より，

$$F(Jx,y)=-G(x,y), \qquad G(Jx,y)=F(x,y) \tag{2.29}$$

となり，したがって，

$$F(Jx,Jy)=F(x,y), \qquad G(Jx,Jy)=G(x,y) \tag{2.30}$$

が成り立つ．よって，F と G は両方とも J のもとで不変である．したがって，V 上に与えられたエルミート構造により，J のもとで不変である二つの V 上の実数値の双 1 次線形関数が決まる．これは，それぞれ対称関数および反対称関数であり，J を用いると，一方の関数は他方の関数で表すことができる．

逆に，複素構造 J をもつ実ベクトル空間 V 上に，J のもとで不変である実数値の対称双 1 次線形関数 F (あるいは，反対称双 1 次線形関数 G) が存在すれば，(2.29) と (2.27) より V 上にエルミート構造 H が決まる (読者はこのことを確かめよ)．

エルミート構造 H に対応する対称双 1 次線形関数 $F(x,y)$ が正定値ならば，H は**正定値エルミート構造**とよばれる．明らかに，正定値のエルミート構造 H は V 上に J のもとで不変である内積を誘導する．すなわち，任意の $x,y\in V$ に対して，

$$x\cdot y=F(x,y)=\frac{1}{2}\left(H(x,y)+\overline{H(x,y)}\right) \tag{2.31}$$

が成り立つ．

ここで，$V_{\mathbb{C}}$ の基底 λ^k を用いてエルミート構造 H を表そう．任意の $x,y\in V$ に対して，

$$\begin{cases} x=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(x^je_j+x^{n+j}Je_j\right), \\ y=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(y^je_j+y^{n+j}Je_j\right) \end{cases} \qquad x^j,y^j\in\mathbb{R} \tag{2.32}$$

が成り立つので，

$$H(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} \left[\left(x^j + ix^{n+j}\right)\left(y^k - iy^{n+k}\right) H(e_j, e_k) \right] \tag{2.33}$$

となる．

一方，$\{e_j, Je_j, 1 \le j \le n\}$ と $\left\{e^{*j}, -Je^{*j}, 1 \le j \le n\right\}$ との間の双対性より，

$$\lambda^j(x) = e^{*j}(x) - i \cdot Je^{*j}(x) = x^j + i \cdot x^{n+j}$$

である．同様に，

$$\overline{\lambda}^k(y) = y^k - i \cdot y^{n+k}$$

となるので，

$$H(x,y) = \sum h_{j\overline{k}} \lambda^j(x) \overline{\lambda}^k(y) \tag{2.34}$$

が成り立つ．ここで，

$$h_{j\overline{k}} = H(e_j, e_k), \qquad \overline{h}_{j\overline{k}} = h_{k\overline{j}} \tag{2.35}$$

である．すなわち，

$$H = \sum h_{j\overline{k}} \lambda^j \otimes \overline{\lambda}^k \tag{2.36}$$

である．

$G(x,y)$ が V 上の実数値の反対称双 1 次線形関数なので，

$$\left\langle x \wedge y, \widehat{H} \right\rangle = -G(x,y) \tag{2.37}$$

をみたす 2 次外微分形式 $\widehat{H}$ が対応する．$\widehat{H}$ はエルミート構造 H の**ケーラー形式**とよばれる．したがって

$$\begin{aligned} -G(x,y) &= \frac{i}{2}\left(H(x,y) - \overline{H(x,y)}\right) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{j\overline{k}} \left(\lambda^j(x)\overline{\lambda}^k(y) - \lambda^j(y)\overline{\lambda}^k(x)\right) \\ &= \left\langle x \wedge y \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{j\overline{k}} \lambda^j \wedge \overline{\lambda}^k \right\rangle \end{aligned}$$

であるので，

$$\widehat{H} = \frac{i}{2} \sum_{j,\overline{k}} h_{j\overline{k}} \lambda^j \wedge \overline{\lambda}^k \tag{2.38}$$

が成り立つ．

§7-3 概複素多様体

定義 3.1 M を m 次元滑らかな多様体，J を M 上の $(1,1)$ 型の滑らかなテンソル場，すなわち任意の $x \in M$ に対して J_x は $T_x(M)$ から $T_x(M)$ への線形変換であるとしよう．各 J_x $(x \in M)$ が接空間 $T_x(M)$ 上の複素構造であるとき，テンソル場 J を M の**概複素構造**とよぶ．概複素構造をもつ滑らかな多様体を**概複素多様体**とよぶ．

ここで，滑らかなテンソル場 J というのは，M 上の任意の滑らかな接ベクトル場 X に対して，JX も M 上の滑らかな接ベクトル場となることである．なお，任意の多様体が概複素構造をもつとは限らない．例えば，定理 2.1 より次が成り立つ．

定理 3.1 概複素多様体は，偶数次元有向多様体である．

注意. ある多様体が概複素構造をもつには，偶数次元と有向性だけが十分条件ではないことは明らかである．Ehresmann や Hopf は，4 次元球面 S^4 が概複素構造をもたないことを示した (Steenrod 1951，p.217 参照).

M を $m = 2n$ 次元の概複素多様体，A を $(1,0)$ 型の複素数値外微分形式空間とし，$\overline{A}$ を A の複素共役な外微分形式の空間としよう．このとき，任意の点 $x \in M$ における直和分解

$$T_x^*(M) \otimes \mathbb{C} = A_x \oplus \overline{A}_x \tag{3.1}$$

が成り立つ．x^α $(1 \leq \alpha \leq 2n)$ を M 上の局所座標系としよう．このとき，接空間の基底 $\partial/\partial x^\alpha$ を用いると，概複素構造 J は

$$J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \sum_\beta a_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{3.2}$$

と表すことができる．ここで，a_α^β は M 上のある近傍における滑らかな関数であり，

$$\sum_{\gamma=1}^{2n} a_\alpha^\gamma a_\gamma^\beta = -\delta_\alpha^\beta \tag{3.3}$$

である．明らかに，任意の点 $x \in M$ における次の式

$$\sum_\beta \left(a_\beta^\alpha + i\delta_\beta^\alpha\right) dx^\beta, \qquad 1 \leq \alpha \leq 2n \tag{3.4}$$

は $(1,0)$ 型外微分形式である．§7-2 によると，これらの $2n$ 個の $(1,0)$ 型外微分形式の中には n 個の複素 1 次独立なものがある．

定理 3.2　複素多様体は，概複素多様体である．

証明　n 次元複素多様体 M は $2n$ 次元実多様体とみなすことができる．$\{z^k, 1 \leq k \leq n\}$ を複素多様体 M 上の局所座標系としよう．さらに，$z^k = x^k + iy^k$ とおくと，$\{x^k, y^k, 1 \leq k \leq n\}$ は実多様体 M の局所座標系となり，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^k}, 1 \leq k \leq n\right\}$ は M 上の座標近傍における自然基底となる．

各点 $x \in M$ における線形写像 $J_x : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$ が，

$$J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^k}, \qquad J_x\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.5}$$

で定義されるとする．明らかに，$J_x^2 = -\mathrm{id} : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$ が成り立つ．次に，J_x の定義は局所座標によらないものであることを示そう．これが示されると，上記の線形写像場は，M 上の大域的な概複素構造であることがわかる．

このことを示すために，w^k を点 x における他の局所座標系としよう．すると，z^j は w^k の正則関数である．$w^k = u^k + iv^k$ とおくと，コーシー–リーマン方程式

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \frac{\partial y^j}{\partial v^k}, \qquad \frac{\partial x^j}{\partial v^k} = -\frac{\partial y^j}{\partial u^k} \tag{3.6}$$

が成り立つ．したがって，(3.5) より，$\dfrac{\partial}{\partial u^k}, \dfrac{\partial}{\partial v^k}$ 上の J_x の作用は

$$\begin{cases} J_x\left(\dfrac{\partial}{\partial u^k}\right) = J_x\left(\displaystyle\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial v^k}, \\ J_x\left(\dfrac{\partial}{\partial v^k}\right) = J_x\left(\displaystyle\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial v^k}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial v^k}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial u^k} \end{cases} \tag{3.7}$$

である．したがって，$\left\{\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial v^k}, 1 \leq k \leq n\right\}$ 上の J_x の作用は (3.5) と一致する．　□

(3.5) で定義された概複素構造は，複素多様体 M の**標準概複素構造**とよばれる．このとき，

$$J_x(dx^k) = -dy^k, \qquad J_x(dy^k) = dx^k \tag{3.8}$$

が成り立つ．したがって $dz^k = dx^k + idy^k$ は $(1,0)$ 型外微分形式で，$d\bar{z}^k = dx^k - idy^k$ は $(0,1)$ 型外微分形式である．接空間の複素化空間 $T_x(M) \otimes \mathbb{C}$ をとり，

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}\right), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}\right), \qquad 1 \leq k \leq n \tag{3.10}$$

とおこう．これらは，(1,0) 型，(0,1) 型接ベクトルであり，$T_m(M) \otimes \mathbb{C}$ の基底となる ((2.26) を参照).

ところで，「$2n$ 次元の任意の概複素多様体は複素構造をもつか」という質問は自然である．これに関しては，$n = 1$ の場合には成立するが，一般次元の場合には成立しない.

ここで局所的に，概複素構造は，(1,0) 型の外微分形式対応している n 個の複素 1 次独立な外微分形式 θ^k $(1 \leq k \leq n)$ によって決まると仮定しよう．このとき，$d\theta^k$ は

$$d\theta^k = \frac{1}{2}\sum_{j,l} A^k_{jl}\theta^j \wedge \theta^l + \sum_{j,l} B^k_{jl}\theta^j \wedge \overline{\theta}^l + \frac{1}{2}\sum_{j,l} C^k_{jl}\overline{\theta}^j \wedge \overline{\theta}^l \tag{3.11}$$

とかける 2 次外微分形式である．ここで，A^k_{jl} と C^k_{jl} は下付添字に関して反対称である．なお，条件

$$d\theta^k \equiv 0 \mod \theta^j \tag{3.12}$$

は，$\left\{\theta^k\right\}$ の選び方によらない．事実，他の n 個の複素 1 次独立な (1,0) 型の外微分形式 λ^k に対して，

$$\lambda^k = \sum_j \mu^k_j \theta^j \tag{3.13}$$

が成り立つ．ただし，μ^k_j は複素数値の滑らかな関数であり，$\det\left(\mu^k_j\right) \neq 0$ である．ここで

$$d\lambda^k = \frac{1}{2}\sum_{j,l} {A'}^k_{jl}\lambda^j \wedge \lambda^l + \sum_{j,l} {B'}^k_{jl}\lambda^j \wedge \overline{\lambda}^l + \frac{1}{2}\sum_{j,l} {C'}^k_{jl}\overline{\lambda}^j \wedge \overline{\lambda}^l \tag{3.14}$$

とおくと，

$${C'}^k_{pq}\mu^p_j\mu^q_l = C^r_{jl}\mu^k_r \tag{3.15}$$

が成り立つ．よって，$C^k_{jl} = 0$ となるための必要十分条件は，${C'}^k_{jl} = 0$ である．すなわち，(3.12) は

$$d\lambda^k \equiv 0 \mod \lambda^j$$

と同値である.

したがって，(3.12) は概複素多様体の全体で意味をもつ式である.

定義 3.2　条件 (3.12) は概複素多様体 M における**積分可能条件**とよばれる．積分可能条件の成り立つ概複素多様体は**積分可能**であるという．

2 次元概複素多様体はつねに積分可能である．4 次元以上の任意の概複素多様体の場合では，つねに積分可能ではない概複素構造が存在する．さらに，この場合，構造を少し変えると積分可能な構造は積分可能ではない構造となる．しかし，これらの性質の証明は容易ではない．

M を複素多様体とすると，M 上の標準概複素構造に関して dz^k は $(1,0)$ 次微分形式である．$\theta^k = dz^k$ とおくと，積分可能条件は明らかに成り立つ．よって，複素多様体上の標準概複素構造はつねに積分可能である．重要な点は，逆も成り立つことである．

定理 3.3　多様体 M 上に積分可能概複素構造があれば，これは複素多様体構造から誘導された標準概複素構造である．

概複素構造が滑らかである場合に Newlander と Nirenberg は上記の定理を証明した．Nijenhuis と Woolf，Kohn と Hörmander はもっと弱い微分条件のもとで定理を証明した．ただし，これらの証明は難しいので，ここでは省略する．

概複素構造が実解析的の場合，定理 3.3 の証明は容易である．(3.12) が成り立つので，フロベニウスの定理より，その $(1,0)$ 型の微分形式が dz^k の 1 次結合でかけるような局所複素座標系 z^k が存在することがわかる．もし，同一近傍にこのような二つの座標系 z^k と w^j が存在するならば，dw^j は dz^k の 1 次結合でかける．このことより，w^j は z^j の正則関数であることが導かれる．これらの座標系によって M 上の複素構造が得られる．

次に，積分可能条件をある概複素構造のテンソルで表そう．(3.2) より，局所座標系 x^α $(1 \le \alpha \le 2n)$ における概複素構造 J の条件 (3.3) をみたす行列は (a^β_α) である．したがって，すべての $(1,0)$ 型の微分形式は，局所的に

$$\sum_\beta \left(a^\alpha_\beta + i\delta^\alpha_\beta\right) dx^\beta, \qquad 1 \le \alpha \le 2n$$

の 1 次結合でかける．よって，積分可能条件 (3.12) は

$$\begin{aligned} d\left(\sum_\beta \left(a^\alpha_\beta + i\delta^\alpha_\beta\right) dx^\beta\right) &= \frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma} a^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\beta \\ &\equiv 0 \bmod \left(\sum_\lambda \left(a^\theta_\lambda + i\delta^\theta_\lambda\right) dx^\lambda\right) \qquad (1 \le \theta \le 2n) \qquad (3.16) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$a^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial a^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial a^{\alpha}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} \tag{3.17}$$

である．dx^{β} の 1 次連立方程式

$$\sum_{\beta} \left(a^{\alpha}_{\beta} + i\delta^{\alpha}_{\beta} \right) dx^{\beta} = 0, \qquad 1 \leq \alpha \leq 2n \tag{3.18}$$

より，$T_x(M) \otimes \mathbb{C}$ の $(0,1)$ 型の接ベクトルの複素部分空間が決まり，後者は $(0,1)$ 型の接ベクトル

$$\sum_{\beta} \left(a^{\alpha}_{\beta} - i\delta^{\alpha}_{\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \qquad 1 \leq \beta \leq 2n$$

により張られるで，(3.18) の解集合内の極大な 1 次独立の集合

$$y_{(\beta)} = \left(a^{1}_{\beta} - i\delta^{1}_{\beta}, \ldots, a^{2n}_{\beta} - i\delta^{2n}_{\beta} \right), \qquad 1 \leq \beta \leq 2n \tag{3.19}$$

は，(3.18) の基本解集合である．したがって，(3.16) より

$$\sum_{\beta,\gamma} a^{\alpha}_{\beta\gamma} \left(a^{\beta}_{\lambda} - i\delta^{\beta}_{\lambda} \right) \left(a^{\gamma}_{\mu} - i\delta^{\gamma}_{\mu} \right) = 0$$

となる，すなわち

$$\sum_{\beta} \left(a^{\alpha}_{\beta\mu} a^{\beta}_{\lambda} - a^{\alpha}_{\beta\lambda} a^{\beta}_{\mu} \right) = 0 \tag{3.20}$$

が成り立つ．ここで

$$t^{\alpha}_{\beta\gamma} = a^{\alpha}_{\beta\rho} a^{\rho}_{\gamma} - a^{\alpha}_{\gamma\rho} a^{\rho}_{\beta} \tag{3.21}$$

とおくと，これは M 上の $(1,2)$ 型のテンソル場であり，概複素構造 J の**振率テンソル**とよばれる．したがって，上記の結果は次のようになる．

定理 3.4 多様体 M 上の概複素構造 J に対して，J が積分可能であるための必要十分条件は，その振率テンソルが 0 となることである．

定義 3.3 ω を概複素多様体 M 上の滑らかな複素数値外微分形式としよう．任意の点 $x \in M$ で $\omega(x)$ が $T_x(M)$ 上の (p,q) 次外微分形式ならば，ω を (p,q) 型の**外微分形式**とよぶ．これらの形式の全体を $A_{p,q}$ とする．

明らかに，$A_{p,q}$ は滑らかな複素数値関数の環の加群であり，次の性質をもつ．

1) $\alpha \in A_{p,q}$ ならば，$\overline{\alpha} \in A_{q,p}$,

2) $\alpha \in A_{p,q}$, $\beta \in A_{r,s}$ に対して，$\alpha \wedge \beta \in A_{p+r,q+s}$,

3) $dA_{p,q} \subset A_{p+2,q-1} + A_{p+1,q} + A_{p,q+1} + A_{p-1,q+2}$,

4) p または $q > n$ $\left(= \frac{1}{2}\dim M\right)$ ならば，$A_{p,q} = 0$.

性質 3) を説明しよう．局所的に，$A_{p,q}$ は滑らかな複素数値関数，および $(1,0)$ 型と $(0,1)$ 型の外微分形式で生成される．一方，

$$
\begin{aligned}
&dA_{0,0} \subset A_{1,0} + A_{0,1},\\
&dA_{1,0} \subset A_{2,0} + A_{1,1} + A_{0,2},\\
&dA_{0,1} \subset A_{2,0} + A_{1,1} + A_{0,2}
\end{aligned}
$$

が成り立つので，外微分形式の定義より，帰納法を用いると性質 3) が成り立つ．

次に $\omega \in A_{p,q}$ に対して，

$$
\partial\omega = \prod_{p+1,q} d\omega, \qquad \overline{\partial}\omega = \prod_{p,q+1} d\omega \tag{3.22}
$$

とおくと，$\partial : A_{p,q} \longrightarrow A_{p+1,q}$ と $\overline{\partial} : A_{p,q} \longrightarrow A_{p,q+1}$ は線形関数である．

定理 3.5 J を多様体 M 上の概複素構造としよう．このとき，J が積分可能であるための必要十分条件は

$$
d = \partial + \overline{\partial} \tag{3.23}
$$

である．

証明 (十分性) θ^k $(1 \le k \le n)$ を J に関する局所 1 次独立な $(1,0)$ 型微分形式であるとしよう．$d = \partial + \overline{\partial}$ より

$$
\prod_{0,2} d\theta^k = 0
$$

が得られる，すなわち，積分可能条件

$$
d\theta^k \equiv 0 \bmod \theta^j, \qquad 1 \le k \le n \tag{3.24}
$$

が成り立つ．

(必要性) (3.24) が成立するならば，

$$
dA_{1,0} \subset A_{2,0} + A_{1,1}, \qquad dA_{0,1} \subset A_{1,1} + A_{0,2} \tag{3.25}
$$

となり，帰納法により，

$$
dA_{p,q} \subset A_{p+1,q} + A_{p,q+1}
$$

が成り立つ．したがって，

$$
d = \partial + \overline{\partial}
$$

である．　□

定理 3.6 多様体 M 上の概複素構造 J が積分可能であるための必要十分条件は

$$\overline{\partial}^2 = 0 \tag{3.26}$$

である.

証明 (必要性) J を積分可能としよう. よって, $d = \partial + \overline{\partial}$ であるので,

$$0 = d^2 = \partial^2 + \left(\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial\right) + \overline{\partial}^2$$

が成り立つ. ここで $\omega \in A_{p,q}$ とすると,

$$\partial^2\omega \in A_{p+2,q}, \qquad \left(\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial\right)\omega \in A_{p+1,q+1}, \qquad \overline{\partial}^2\omega \in A_{p,q+2}$$

となり,

$$\partial^2\omega = 0, \qquad \left(\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial\right)\omega = 0, \qquad \overline{\partial}^2\omega = 0 \tag{3.27}$$

が得られ, したがって, (3.26) が成り立つ.

(十分性) $\overline{\partial}^2 = 0$ としよう. M 上の滑らかな複素数値関数 F に対して,

$$dF = \sum_k F_k\theta^k + \sum_k G_k\overline{\theta}^k \tag{3.28}$$

とかけるので, (3.11) を用いると

$$\partial F = \sum_k F_k\theta^k, \qquad \overline{\partial} F = \sum_k G_k\overline{\theta}^k, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\overline{\partial}^2 F &= \prod_{0,2} d\left(\overline{\partial}F\right) = \prod_{0,2} d\left(\overline{\partial} - d\right) F \\ &= -\prod_{0,2} d\left(\partial F\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k,j,l} F_k C^k_{jl}\overline{\theta}^j \wedge \overline{\theta}^l\end{aligned} \tag{3.30}$$

が得られる. 任意の F に対して $\overline{\partial}^2 F = 0$ が成り立つので, $C^k_{jl} = 0$ となる. よって, 積分可能条件が成り立つ. □

M を局所座標系 $z^k = x^k + iy^k$ $(1 \leq k \leq n)$ をもつ n 次元複素多様体としよう. このとき, M の標準概複素構造に関して, dz^k は M 上の $(1,0)$ 型微分形式である. よって, 任意の滑らかな (p,q) 型微分形式は局所的に

$$a = \sum a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q} dz^{k_1} \wedge \cdots \wedge dz^{k_p} \wedge d\overline{z}^{l_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{l_q} \tag{3.31}$$

とかける. ここで, $a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}$ は滑らかな複素数値関数である.

M 上の滑らかな複素数値関数 f に対して,

$$df = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial f}{\partial y^k}dy^k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z^k}dz^k + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}^k}d\overline{z}^k\right)$$

が成り立つ．ここで，$\dfrac{\partial}{\partial z^k}$ と $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}^k}$ は (3.9) と (3.10) で定義されたそれぞれの作用素である．したがって，

$$\partial f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^k} dz^k, \qquad \overline{\partial} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}^k} d\overline{z}^k \tag{3.32}$$

が成り立つ．すると，(3.31) より，

$$\begin{aligned} \partial a &= \sum \partial a_{k_1 \cdots k_p, \overline{l}_1 \cdots \overline{l}_q} \wedge dz^{k_1} \wedge \cdots \wedge dz^{k_p} \wedge d\overline{z}^{l_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{l_q} \\ &= \sum \frac{\partial a_{k_1 \cdots k_p, \overline{l}_1 \cdots \overline{l}_q}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{k_1} \wedge \cdots \wedge dz^{k_p} \wedge d\overline{z}^{l_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{l_q} \end{aligned} \tag{3.33}$$

が成り立つ．同様に，

$$\overline{\partial} a = (-1)^p \sum \frac{\partial a_{k_1 \cdots k_p, \overline{l}_1 \cdots \overline{l}_q}}{\partial \overline{z}^l} dz^{k_1} \wedge \cdots \wedge dz^{k_p} \wedge d\overline{z}^{l} \wedge d\overline{z}^{l_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{l_q} \tag{3.34}$$

となる．ここで

$$f\left(z^1, \ldots, z^n\right) = g\left(z^1, \ldots, z^n\right) + ih\left(z^1, \ldots, z^n\right) \tag{3.35}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}^k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)(g + ih) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x^k} - \frac{\partial h}{\partial y^k}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x^k} + \frac{\partial g}{\partial y^k}\right) \end{aligned} \tag{3.36}$$

が得られる．

定理 3.7　f を複素多様体 M 上の滑らかな複素数値関数としよう．このとき，f が正則関数であるための必要十分条件は $\overline{\partial} f = 0$ である．

証明　f に関するコーシー–リーマン条件は

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial h}{\partial y^k}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y^k} = -\frac{\partial h}{\partial x^k}, \qquad 1 \leq k \leq n$$

である．(3.32), (3.36) より，この条件は $\overline{\partial} f = 0$ と同値であり，すなわち f が正則関数であるための必要条件は $\overline{\partial} f = 0$ である．

ここで，局所表現

$$a = \sum a_{k_1 \cdots k_p} dz^{k_1} \wedge \cdots \wedge dz^{k_p}$$

をもつ $(p, 0)$ 型の微分形式 a に対して，$a_{k_1 \cdots k_p}$ が正則関数のとき，定理 3.6 より

$$da = \partial a = \sum \frac{\partial a_{k_1 \cdots k_p}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{k_1} \wedge \cdots \wedge dz^{k_p}$$

が得られる．よって，作用素 ∂ は $(p,0)$ 型の微分複素形式を $(p+1,0)$ 型の形式に複素線形的にうつす． □

§7-4 複素ベクトル束の接続

§3-1 ではベクトル束 (E, M, π) について述べたが，ファイバーが q 次元複素ベクトル空間 V のとき，そのベクトル束は M 上の q 次元複素ベクトル束である．この場合は，構造群は

$$GL(V) \simeq GL(q; \mathbb{C})$$

である．

M を m 次元滑らかな多様体とし，(E, M, π) を M 上の q 次元複素ベクトル束としよう．このとき，切断空間 $\Gamma(E)$ は線形複素構造をもち，M 上の滑らかな複素数値関数の環上の加群である．§4-1 で述べた実ベクトル束の接続論に対して，実数体の代わりに複素数体を用いると，複素ベクトル束 (E, M, π) の接続論が得られる．ここではこれをくり返すことはしない．

$\{a_\alpha, 1 \leq \alpha \leq q\}$ を近傍 $U \subset M$ 上の複素ベクトル束 E 上の局所標構場としよう．E 上の接続 D の U における作用を

$$Ds_\alpha = \sum_\beta \omega_\alpha^\beta s_\beta \tag{4.1}$$

で表すことができる．ここで，ω_α^β は複素数値 1 次微分形式である．行列表現を用いると，(4.1) は

$$DS = \omega \cdot S \tag{4.2}$$

とかける．ここで，

$$S = {}^t(s_1, \ldots, s_q), \tag{4.3}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_q^1 & \cdots & \omega_q^q \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

である．

次に，接続の曲率行列は

$$\Omega = \left(\Omega_\alpha^\beta\right) = d\omega - \omega \wedge \omega \tag{4.5}$$

である．さらに，この式を外微分すると，ビアンキの恒等式

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega \tag{4.6}$$

が得られる．

他の局所標構場 S' を選び，

$$S' = A \cdot S \tag{4.7}$$

とおくと，

$$\Omega' = A \cdot \Omega \cdot A^{-1} \tag{4.8}$$

が成り立つ (第 4 章の (1.29) を参照)．ここで $\det A \neq 0$ である．この変換は次の定義を起こさせる．

定義 4.1　ベクトル束 (E, M, π) の各局所標構場 S に対し，標構場 S の変換 (4.7) に関して，式

$$\Phi_{S'} = A \cdot \Phi_S \cdot A^{-1} \tag{4.9}$$

をみたす k 次外微分形式の $q \times q$ 型行列があれば，Φ_S を**随伴型のテンソル行列**とよぶ．

標構場 S の変換式 (4.7) に関して，接続行列 ω の変換式は

$$\omega' \cdot A = dA + A \cdot \omega \tag{4.10}$$

であるので，(4.9) を微分すれば，

$$d\Phi_{S'} = dA \wedge \Phi_S \cdot A^{-1} + A \cdot d\Phi_S \cdot A^{-1} + (-1)^k A \cdot \Phi_S \wedge dA^{-1}$$

となる．上記の式に (4.9) を代入し，整理すれば，

$$D\Phi_{S'} = A \cdot D\Phi_S \cdot A^{-1} \tag{4.11}$$

が得られる．ここで，

$$D\Phi_S = d\Phi_s - \omega \wedge \Phi_S + (-1)^k \Phi_S \wedge \omega \tag{4.12}$$

である．したがって，$\{D\Phi_S\}$ も随伴型のテンソル行列であり，その元は $(k+1)$ 次外微分形式であることがわかる．$D\Phi_S$ は Φ_S の**共変微分**とよばれる．

上記の定義とビアンキの恒等式 (4.6) より，曲率行列 Ω の共変微分は 0 となる．すなわち，

$$D\Omega = 0 \tag{4.13}$$

が成り立つ．ここで随伴型のテンソル行列を議論するとき，簡単のため下付添字 S を略し，ある標構場に関して計算を行うときにのみそれを明記することにする．

(4.12) をさらに共変微分すると，

$$D^2\Phi = \Phi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Phi \tag{4.14}$$

が得られる (この式の証明は読者にまかせる)．右辺を

$$[\Phi\,,\,\Omega] = \Phi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Phi \tag{4.15}$$

とおくと，(4.14) は

$$D^2\Phi = [\Phi\,,\,\Omega] \tag{4.16}$$

となる．

$q \times q$ 型行列 A_i $(1 \leq i \leq r)$ の複素 r 次線形関数 $P\,(A_1, \ldots, A_r)$ を考えよう．

$$A_i = \left(a^i_{\alpha\beta}\right), \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq q, \quad 1 \leq i \leq r \tag{4.17}$$

とすると，関数 P は

$$P\,(A_1, \ldots, A_r) = \sum_{1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq q} \lambda_{\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_r} a^1_{\alpha_1\beta_1} \cdots a^r_{\alpha_r\beta_r} \tag{4.18}$$

とかける．ここで $\lambda_{\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_r}$ は複素数である．$\{1, \ldots, r\}$ の任意の置換 σ に対して

$$P\left(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(r)}\right) = P\,(A_1, \ldots, A_r) \tag{4.19}$$

が成り立つならば，P は**対称**とよばれる．さらに，任意の $B \in GL\,(q; \mathbb{C})$ に対して

$$P\left(BA_1B^{-1}, \ldots, BA_rB^{-1}\right) = P\,(A_1, \ldots, A_r) \tag{4.20}$$

が成り立つならば，P は**不変多項式**とよばれる．

対称不変多項式を得るために，以下の方法を用いよう．I を $q \times q$ 型の単位行列とし，

$$\det\left(\mathrm{I} + \frac{i}{2\pi}A\right) = \sum_{0 \leq j \leq q} \binom{q}{j} P_j(A) \tag{4.21}$$

とおこう．ここで，$P_j(A)$ は j 次の A の同次多項式である．任意の非退化 $q\times q$ 型の行列に対して，

$$\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}BAB^{-1}=B\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}A\right)B^{-1}$$

が成り立つので，

$$\det\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}BAB^{-1}\right)=\det\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}A\right) \tag{4.22}$$

となる．よって，

$$P_j\left(BAB^{-1}\right)=P_j\left(A\right) \tag{4.23}$$

が得られる．すなわち $P_j(A)$ は不変多項式である．

ここで，$P_j\left(A_1,\ldots,A_j\right)$ を $P_j(A)$ の**完全偏極多項式**としよう．すなわち，$P_j(A_1,\ldots,A_j)$ は

$$P_j(A,\ldots,A)=P_j(A) \tag{4.24}$$

をみたす $A_1,\ldots,A_j$ の対称 j 次線形関数である．$P_j(A_1,\ldots,A_j)$ が $P_j(A)$ を用いて表すことができることは容易にわかる．例えば，

$$\begin{aligned}P_2(A_1,A_2)&=\frac{1}{2}\left\{P_2(A_1+A_2)-P_2(A_1)-P_2(A_2)\right\},\\ P_3(A_1,A_2,A_3)&=\frac{1}{6}\left\{P_3(A_1+A_2+A_3)-P_3(A_1+A_2)\right.\\ &\quad-P_3(A_1+A_3)-P_3(A_2+A_3)+P_3(A_1)\\ &\quad\left.+P_3(A_2)+P_3(A_3)\right\}\end{aligned} \tag{4.25}$$

が得られる．ゆえに，$P_j(A_1,\ldots,A_j)$ は不変対称 j 次線形関数である．

次に，$P\left(A_1,\ldots,A_r\right)$ を不変多項式とし，非退化行列 B を

$$B=\mathrm{I}+B' \tag{4.26}$$

で表すと，

$$B^{-1}=\mathrm{I}-B'+\cdots \tag{4.27}$$

が成り立つ．ここで，第 3 項目以降は，行列 B' の元の高次項を含んだ項である．この式を (4.20) に代入し，B' の線形部分を考えると，

$$\sum_{1\leq i\leq r}P\left(A_1,\ldots,B'A_i-A_iB',\ldots,A_r\right)=0 \tag{4.28}$$

が得られる．この方程式は，A_i が外微分形式[3]の行列である場合でも成り立つ．

A_i を d_i 次外微分形式の行列としよう．このとき，任意の 1 次微分形式の $q\times q$ 型の行列 θ に対して

$$\sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(A_1,\ldots,\theta\wedge A_i,\ldots,A_r) + \sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_i+1}P(A_1,\ldots,A_i\wedge\theta,\ldots,A_r)=0 \tag{4.29}$$

が成り立つ．なぜならば，θ は $B'\cdot a$ 行列の和であるからである．ここで，B' は数の $q\times q$ 型の行列であり，a は 1 次微分形式である．P は多重線形なので，$\theta=B'\cdot a$ に関して (4.29) を証明すれば十分である．$\theta=B'\cdot a$ を (4.29) の左辺に代入すれば，

$$a\wedge\left\{\sum_{1\le i\le r}P(A_1,\ldots,B'\cdot A_i,\ldots,A_r)-\sum_{1\le i\le r}P(A_1,\ldots,A_i\cdot B',\ldots,A_r)\right\}$$

が得られる．(4.28) より括弧の中は 0 となり，したがって (4.29) が成り立つ．

不変多項式より，接続の局所的な性質と大域的な性質との間の関係が得られる．$P(A_1,\ldots,A_r)$ を不変多項式とし，A_i を外微分 d_i 形式の随伴型テンソル行列としよう．明らかに，$P(A_1,\ldots,A_r)$ は局所標構場に依存しない $(d_1+d_2+\cdots+d_r)$ 次外微分形式である．すなわち，M 上の大域的な外微分形式である．(4.12) と (4.29) より

$$\begin{aligned}dP(A_1,\ldots,A_r) &= \sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(A_1,\ldots,dA_i,\ldots,A_r)\\ &= \sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}\Big\{P(A_1,\ldots,DA_i,\ldots,A_r)\\ &\qquad + P\Big(A_1,\ldots,\omega\wedge A_i+(-1)^{d_i+1}A_i\wedge\omega,\ldots,A_r\Big)\Big\}\\ &= \sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(A_1,\ldots,DA_i,\ldots,A_r)\end{aligned} \tag{4.30}$$

が得られる．特に，任意の不変多項式 $P_j(A)$ に対して，A をある接続の曲率行列とすると，$D\Omega=0$ となる．よって，

$$dP_j(\Omega)=0 \tag{4.31}$$

---

3) $P(A_1,\ldots,A_r)$ が (4.18) のようにかけるとしよう．このとき $A_i=\left(a^i_{\alpha\beta}\right)$ が外微分形式の行列ならば，$P(A_1,\ldots,A_r)=\sum_{1\le\alpha_i,\beta_i\le q}\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_r,\beta_1\cdots\beta_r}a^1_{\alpha_1\beta_1}\wedge\cdots\wedge a^r_{\alpha_r\beta_r}$ と定義する．

が成り立つ．したがって，$P_j(\Omega)$ は M 上の大域的な閉 $2j$ 次外微分形式である．

定理 4.1　(E, M, π) を滑らかな m 次元多様体 M 上の q 次元複素ベクトル束とし，Ω と $\widetilde{\Omega}$ をそれぞれ接続 ω と $\widetilde{\omega}$ に対応する曲率形式としよう．このとき $P(A_1, \ldots, A_r)$ が対称不変多項式ならば，

$$P(\widetilde{\Omega}) - P(\Omega) = dQ \tag{4.32}$$

をみたす M 上の $(2r-1)$ 次外微分形式 Q が存在する．

証明

$$\eta = \widetilde{\omega} - \omega \tag{4.33}$$

とおこう．他の局所標構場 $S' = B \cdot S$ を選ぶと，

$$\widetilde{\omega}' \cdot B = dB + B \cdot \widetilde{\omega},$$
$$\omega' \cdot B = dB + B \cdot \omega$$

となる．ここで $\widetilde{\omega}', \omega'$ は，局所標構場 S' に関して対応する接続行列である．よって，$\eta' = \widetilde{\omega}' - \omega'$ と η は，式

$$\eta' \cdot B = B \cdot \eta \tag{4.34}$$

をみたす．すなわち，η は 1 次微分形式を成分とする随伴型テンソル行列である．ここで

$$\omega_t = \omega + t\eta, \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{4.35}$$

とおこう．このとき ω_t は，$t=0$ のとき ω，$t=1$ のとき $\widetilde{\omega}$ であるパラメーター t に依存する接続の族を生成する．接続 ω_t の曲率行列は

$$\begin{aligned}\Omega_t &= d\omega_t - \omega_t \wedge \omega_t \\ &= \Omega + tD\eta - t^2 \eta \wedge \eta \end{aligned} \tag{4.36}$$

であり，したがって，

$$\frac{d}{dt}\Omega_t = D\eta - 2t\eta \wedge \eta \tag{4.37}$$

が成り立つ．ここで共変微分は接続 ω に関して計算されるものである．

次に，$P(A_1, \ldots, A_r)$ を対称不変多項式とし，

$$\begin{cases} P(A) = P(A, \ldots A), \\ Q(B, A) = rP(B, A, \ldots, A) \end{cases} \tag{4.38}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(\Omega_t) &= rP\left(\frac{d\Omega}{dt}, \Omega_t, \ldots, \Omega_t\right) \\ &= Q(D\eta, \Omega_t) - 2tQ(\eta \wedge \eta, \Omega_t)\end{aligned} \tag{4.39}$$

が成り立つ．共変微分の定義より，(4.36) を用いると，

$$\begin{aligned} D\Omega_t &= tD^2\eta - t^2 D(\eta\wedge\eta) \\ &= t(\eta\wedge\Omega - \Omega\wedge\eta) + t^2(\eta\wedge D\eta - D\eta\wedge\eta) \\ &= t[\eta, \Omega] + t^2[\eta, D\eta] \\ &= t[\eta, \Omega_t] \end{aligned} \tag{4.40}$$

が得られる．よって，

$$\begin{aligned} dQ(\eta,\Omega_t) &= r\,dP(\eta,\Omega_t,\ldots,\Omega_t) \\ &= r\,P(D\eta,\Omega_t,\ldots,\Omega_t) - r(r-1)P(\eta, D\Omega_t,\Omega_t,\ldots,\Omega_t) \\ &= Q(D\eta,\Omega_t) - r(r-1)tP(\eta,[\eta, \Omega_t],\Omega_t,\ldots,\Omega_t) \end{aligned} \tag{4.41}$$

が成り立つ．(4.29) では，$\theta = A_1 = \eta$, $A_2 = \cdots = A_r = \Omega_t$ とおくと，

$$2P(\eta\wedge\eta,\Omega_t,\ldots,\Omega_t) - (r-1)P(\eta,[\eta, \Omega_t],\Omega_t,\ldots,\Omega_t) = 0$$

が得られる，すなわち

$$2Q(\eta\wedge\eta,\Omega_t) - r(r-1)P(\eta,[\eta, \Omega_t],\Omega_t,\ldots,\Omega_t) = 0 \tag{4.42}$$

が成り立つ．(4.41) と (4.42) を比較すれば，

$$\begin{aligned} dQ(\eta,\Omega_t) &= Q(D\eta,\Omega_t) - 2tQ(\eta\wedge\eta,\Omega_t) \\ &= \frac{d}{dt}P(\Omega_t) \end{aligned} \tag{4.43}$$

となる．両辺を t に関して積分すれば，

$$P(\widetilde{\Omega}) - P(\Omega) = d\left(\int_0^1 Q(\eta,\Omega_t)\,dt\right)$$

が得られる．さらに，

$$Q = \int_0^1 Q(\eta,\Omega_t)\,dt \tag{4.44}$$

とおくと，Q は M 上の求められた $(2r-1)$ 次外微分形式となる． □

(4.31) と同様に，$P(\Omega)$ は閉外微分形式である．これが実数値の外微分形式ならば，それは M のコホモロジー群 $H^{2r}(M;\mathbb{R})$ の元となる．よって，定理 4.1 の真髄は次のようにいえる．外微分形式 $P(\Omega)$ が接続で定義されたものであっても，そのド・ラムのコホモロジー類は複素ベクトル束 E の接続に依存しない．エルミート構造の両立接続 (以下の定義 4.4) に対して，$P(\Omega)$ は，実数値の外微分形式である．したがって，各対称不変多項式 P は，あるド・ラムの

コホモロジー類に対応する．

定義 4.2 V を複素ベクトル空間としよう．$V \times V$ 上で定義されるある複素数値関数 $H(\xi, \eta)$ $(\xi, \eta \in V)$ は，条件

1) 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$，$\xi_1, \xi_2 \in V$ に対して，

$$H(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \eta) = \lambda_1 H(\xi_1, \eta) + \lambda_2 H(\xi_2, \eta),$$

2) $\overline{H(\xi, \eta)} = H(\eta, \xi)$

をみたす．この $H(\xi, \eta)$ を V 上の**エルミート構造**とよぶ．さらに，任意の $\xi \in V$ $(\xi \neq 0)$ に対して

$$H(\xi, \xi) > 0$$

が成り立つ場合，エルミート構造 H は**正定値**であるという．

注意．J を $2n$ 次元実ベクトル空間 V 上の複素構造としよう．このとき，

$$i \cdot X = JX, \qquad X \in V \tag{4.45}$$

とおくと，V は n 次元複素空間となる．したがって，定義 2.2 における複素構造をもつ実ベクトル空間 V 上のエルミート構造は，定義 4.2 おける複素ベクトル空間 V 上のエルミート構造に対応する．

定義 4.3 (E, M, π) を滑らかな m 次元多様体 M 上の q 次元複素ベクトル束としよう．各点 $x \in M$ でファイバー $\pi^{-1}(x)$ 上の正定値エルミート構造が滑らかに対応するとき，E 上にエルミート構造が入るという．与えられたエルミート構造をもつ複素ベクトル束は**エルミートベクトル束**とよばれる．

上記の "滑らかな対応性" というのは，束の滑らかな任意の二つの切断に対して，M 上の複素数値 $H(\xi, \eta)$ が滑らかであるという意味である．

単位の分割定理より，各複素ベクトル束がエルミート構造をもつことが示される (このことの証明は M 上のリーマン計量の存在の証明と同様である)．任意の局所標構場

$$S = {}^t(s_1, \ldots, s_q)$$

に対して，エルミート構造 H はエルミート行列

$$H_S = \left(h_{\alpha\overline{\beta}}\right) = {}^t\overline{H}_S \tag{4.46}$$

に対応する．ここで，

$$h_{\alpha\overline{\beta}} = H\left(s_\alpha, s_\beta\right) \tag{4.47}$$

である．$\xi = \sum_\alpha \xi^\alpha s_\alpha$, $\eta = \sum_\beta \eta^\beta s_\beta$ とおくと，

$$H\left(\xi, \eta\right) = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\overline{\beta}} \xi^\alpha \overline{\eta}^\beta \tag{4.48}$$

が成り立つ．

定義 4.4 D をエルミートベクトル束の接続としよう．任意の曲線に沿って平行な任意のベクトル場 ξ, η に対して，$H\left(\xi, \eta\right)$ が定数ならば，D をそのベクトル束上の**両立接続**とよぶ．

ξ と η は曲線 C に沿って平行なので，C に沿って

$$D\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \sum_\beta \xi^\beta \omega_\beta^\alpha = 0,$$

$$D\eta^\alpha = d\eta^\alpha + \sum_\beta \eta^\beta \omega_\beta^\alpha = 0$$

が成り立つ．したがって，(4.48) より，

$$dH\left(\xi, \eta\right) = \sum_{\alpha,\beta} \left(dh_{\alpha\overline{\beta}} - \sum_\gamma h_{\gamma\overline{\beta}} \omega_\alpha^\gamma - \sum_\gamma h_{\alpha\overline{\gamma}} \overline{\omega}_\beta^\gamma \right) \xi^\alpha \overline{\eta}^\beta$$

となる．すなわち，ω が両立接続であるための条件は

$$dh_{\alpha\overline{\beta}} - \sum_\gamma h_{\gamma\overline{\beta}} \omega_\alpha^\gamma - \sum_\gamma h_{\alpha\overline{\gamma}} \overline{\omega}_\beta^\gamma = 0 \tag{4.49}$$

であり，行列表現を用いると，

$$dH = \omega \cdot H + H \cdot {}^t\overline{\omega} \tag{4.50}$$

である．

注意. エルミート束では，両立接続が必ず存在する (読者はこのことを証明せよ).

(4.50) を外微分すれば，

$$\Omega \cdot H + H \cdot {}^t\overline{\Omega} = 0 \tag{4.51}$$

となる，すなわち，行列 $\Omega \cdot H$ は反エルミートである．よって，エルミートベ

クトル束 E の両立接続に関して

$$\begin{aligned}\overline{\det\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}\Omega\right)} &= \det\left(\mathrm{I}-\frac{i}{2\pi}\overline{\Omega}\right)\\ &= \det\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}H^{-1}\cdot\Omega\cdot H\right)\\ &= \det\left(\mathrm{I}+\frac{i}{2\pi}\Omega\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，

$$\overline{P_j(\Omega)} = P_j(\Omega)$$

である，よって，$P_j(\Omega)$ は M 上の実数値閉 $2j$ 次外微分形式である．ここで $P_j(\Omega)$ によって決まるド・ラムのコホモロジー類 $c_j(E)$ は，M 上のエルミート構造と両立接続の選び方に依存しない．この $c_j(E)$ は，複素ベクトル束 E における実係数をもつ**第 j 次のチャーン類**とよばれる (詳細は Chern 1946 を参照されたい).

(4.21) の行列式を展開すると，$P_j(\Omega)$ の式

$$P_j(\Omega) = \frac{1}{j!}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^j \sum_{1\le\alpha_r,\beta_r\le q} \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_j}_{\beta_1\cdots\beta_j}\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{\beta_j}_{\alpha_j} \tag{4.52}$$

が得られる．ここで，$\Omega = \left(\Omega^\beta_\alpha\right)$ はエルミートベクトル束 E の両立接続の曲率行列である．

注意．E をファイバー V をもつ M 上の q 次元実ベクトル束としよう．$E\otimes\mathbb{C}$ を E の複素化とすると，これは q 次元複素ベクトル空間 $V\otimes\mathbb{C}$ をファイバーとしてもつ複素ベクトル束である．ここで，複素ベクトル束 $E\times\mathbb{C}$ の第 $2j$ 次のチャーン類を c_{2j} としよう．このとき，

$$p_j(E) = (-1)^j c_{2j} \in H^{4j}(M;\mathbb{R}) \tag{4.53}$$

を**第 j 次のポントリャーギン類**とよぶ (Kobayashi and Nomizu 1963, 1969 を参照). もし，実ベクトル束 E の接続 ω の曲率行列を

$$\Omega = \left(\Omega^\beta_\alpha\right)$$

とすると，ド・ラムのコホモロジー類 $p_j(E)$ は，実数値閉 $4j$ 次外微分形式

$$\frac{1}{(2j)!\,(2\pi)^{2j}} \sum_{1\le\alpha_r,\beta_r\le q} \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_{2j}}_{\beta_1\cdots\beta_{2j}}\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{\beta_{2j}}_{\alpha_{2j}} \tag{4.54}$$

によって決まる．

定義 4.5 M を m 次元複素多様体とし，$\pi : E \longrightarrow M$ を q 次元複素ベクトル束としよう．このとき，局所座標 U, W $(U \cap W \neq \varnothing)$ に対して，変換関数

$$g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(q;\mathbb{C})$$

が正則ならば，E は M 上の**正則ベクトル束**とよばれる．また，正則ベクトル束 E のファイバーが 1 次元複素ベクトル空間 $(q = 1)$ ならば，E は複素多様体 M 上の**正則直線束**とよばれる．

明らかに，正則ベクトル束の束空間は複素多様体である．

m 次元複素多様体を $2m$ 次元実多様体とみなすと，後者は標準概複素構造をもつ．この標準概複素構造に関する $(1,0)$ 型の接ベクトルの全体は，M の**接束**とよばれる複素多様体 M 上の正則ベクトル束である．なぜならば，任意の局所複素座標系 $\left(z^1, \ldots, z^m\right)$ に対して，$\left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^m}\right)$ が接束の局所標構場となるからである．明らかに，このような二つの標構場は互いに正則に変換される．したがって，接束は正則ベクトル束であることがわかる．

$\gamma : U \longrightarrow E$ を座標近傍 $U \subset M$ での正則ベクトル束 E の切断としよう．γ が正則写像ならば，γ は**正則切断**とよばれる．S と S' を二つの正則な局所標構場としよう．このとき，これらの近傍の共通部分の上では

$$S' = A \cdot S \tag{4.55}$$

が成り立つ．ここで，A は正則関数の非退化行列である．

定義 4.6 D を正則ベクトル束 (E, M, π) の接続とする．このとき，任意の正則な局所標構場 S に対して，M の標準概複素構造に関する $(1,0)$ 次微分形式によって接続行列 ω が構成されるとき，D は (1,0) **型接続**とよばれる．

ω は局所標構場 S の選び方に依存しない $(1,0)$ 型行列なので，上記の定義は意味をもつ．すなわち，局所標構場の正則変換 (4.55) のもとで，A は正則関数の行列であり，定理 3.6 より $\overline{\partial} A = 0$ となる．よって，

$$\begin{aligned} \omega' &= dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1} \\ &= \partial A \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

であり，ω が $(1,0)$ 型行列ならば，ω' も同じ型の行列である．またその逆も成り立つ．

E がエルミート正則ベクトル束ならば，E 上に唯一の $(1,0)$ 型両立接続が存在する．事実，ω が両立接続であるための条件は

$$dH = \omega \cdot H + H \cdot {}^t\overline{\omega}$$

であり，したがって，ω が $(1,0)$ 型行列ならば，$\overline{\omega}$ は $(0,1)$ 型行列である．ゆえに

$$\partial H = \omega \cdot H \tag{4.56}$$

が成り立つ．これより，$(1,0)$ 型両立接続 ω は

$$\omega = \partial H \cdot H^{-1} \tag{4.57}$$

とかけることがわかる．この式は，実際に E 上の接続を与えるものであることが容易に示される．

エルミート正則ベクトル束 E 上の $(1,0)$ 型両立接続の曲率行列は，

$$\begin{aligned}\Omega &= d\left(\partial H \cdot H^{-1}\right) - \left(\partial H \cdot H^{-1}\right) \wedge \left(\partial H \cdot H^{-1}\right) \\ &= -\partial\overline{\partial} H \cdot H^{-1} + \partial H \cdot H^{-1} \wedge \overline{\partial} H \cdot H^{-1}\end{aligned} \tag{4.58}$$

であり，Ω は $(1,1)$ 次微分形式の行列である．

§7-5　エルミート多様体とケーラー多様体

定義 5.1　M を m 次元複素多様体としよう．M の接束にエルミート構造が与えられているならば，M を**エルミート多様体**とよぶ．

局所複素座標系 $(U; z^1, \ldots, z^m)$ に対して，接束の対応する局所標構場は

$$s_i = \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{5.1}$$

である．本節では，添字の範囲を

$$1 \leq i, j, k, l \leq m$$

とし，アインシュタインの縮約記号を用いる．すなわち和の記号を省略する．ここで

$$h_{i\overline{k}} = h_{\overline{k}i} = H\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) \tag{5.2}$$

とおくと，

$$\overline{h}_{k\bar{i}} = h_{\overline{k}i} \tag{5.3}$$

が成り立ち，行列 $H = \left(h_{i\overline{k}}\right)$ は正定値である．U 上の任意の $(1,0)$ 型接ベクトル場 ξ, η は

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \qquad \eta = \eta^k \frac{\partial}{\partial z^k} \tag{5.4}$$

とかける．ここで，ξ^i, η^k は U 上の滑らかな複素数値関数である．したがって，

$$H(\xi, \eta) = h_{i\overline{k}} \xi^i \overline{\eta}^k \tag{5.5}$$

が成り立つ．

M 上の**ケーラー形式**

$$\widehat{H} = \frac{i}{2} h_{i\overline{k}} dz^i \wedge d\overline{z}^k \tag{5.6}$$

は，実数値 $(1,1)$ 次微分形式である．

ところで，接束の接続は捩率行列をもっている．局所標構場 $S = {}^t(s_1, \ldots, s_m)$ の双対標構を $\sigma = \left(\sigma^1, \ldots, \sigma^m\right)$ としよう．他の局所標構場

$$S' = A \cdot S \tag{5.7}$$

に対して，その双対標構は

$$\sigma' = \sigma \cdot A^{-1},$$

あるいは，

$$\sigma = \sigma' \cdot A \tag{5.8}$$

である．(5.8) を外微分すれば，

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma' \cdot A - \sigma' \wedge dA \\ &= (d\sigma' - \sigma' \wedge \omega')\, A + \sigma \wedge \omega \end{aligned}$$

が得られる．すなわち

$$\tau = \tau' \cdot A \tag{5.9}$$

となる．ここで，

$$\tau = d\sigma - \sigma \wedge \omega, \qquad \tau' = d\sigma' - \sigma' \wedge \omega' \tag{5.10}$$

である．τ は複素数値 2 次外微分形式の $(1 \times m)$ 型行列であり，複素多様体の接束上の接続の**捩率行列**とよばれる．

定理 5.1 M をエルミート多様体としよう．このとき，D が M の接束上の $(1,0)$ 型接続であるための必要十分条件は，その捩率行列が $(2,0)$ 次微分形式で構成されることである．

証明　正則標構場 S の双対標構場を $\sigma=\left(\sigma^1,\ldots,\sigma^m\right)$ としよう．このとき，各 σ^i は正則微分 $(1,0)$ 次形式である．すなわち，複素局所座標系 z^i に対して，σ^i は

$$\sigma^i=a^i_j dz^j$$

となる．ここで，a^i_j は正則関数である．したがって

$$\overline{\partial}\sigma=0 \tag{5.11}$$

である．さて，接続行列 ω は

$$\omega=\omega_1+\omega_2 \tag{5.12}$$

と一意的に分解できる．ここで，ω_1,ω_2 はそれぞれ $(1,0)$ 次微分形式と $(0,1)$ 次微分形式である．よって，捩率行列 τ は

$$\begin{aligned}\tau&=d\sigma-\sigma\wedge\omega\\&=(\partial\sigma-\sigma\wedge\omega_1)-\sigma\wedge\omega_2\end{aligned} \tag{5.13}$$

と表せる．この式の右辺はすでに $(2,0)$ 型と $(1,1)$ 型行列の和に分解されている．したがって，捩率行列が $(2,0)$ 次微分形式で構成されるための必要十分条件は

$$\sigma\wedge\omega_2=0 \tag{5.14}$$

である．

$\omega_2=\left(\theta^k_j\right)$ とおくと，(5.14) は

$$\sigma^j\wedge\theta^k_j=0 \tag{5.15}$$

となる．カルタンの補題より，

$$\theta^k_j=a^k_{ij}\sigma^i \tag{5.16}$$

が成り立つ．ここで，a^k_{ij} は滑らかな複素数値関数である．よって，σ^j は $(1,0)$ 次微分形式で，θ^k_j は $(0,1)$ 次微分形式なので，条件 (5.14) は

$$a^k_{ij}=0,\quad \text{すなわち},\quad \omega_2=0 \tag{5.17}$$

と同値である．すなわち，ω は $(1,0)$ 次微分形式である．　□

上記の証明では，$(1,0)$ 型接続を定義するのに正則標構場を用いたが，定理 5.1 では局所標構場の滑らかな構造のみが必要である．なぜならば，(5.9) より，(5.7) のような局所標構場変換は捩率形式 τ^i の偶数次数，すなわち捩率行列の

型を変えないからである．この事実は，エルミート多様体の研究におおいに役立つものである．すなわち，正則標構 $\{s_i; H(s_i, s_j) = \delta_{ij}\}$ は滑らかであるが，必ずしも正則とは限らないのである．

§7–4 の最後の節の議論によると，エルミート多様体の接束上にただ一つの $(1,0)$ 型両立接続があることとなる．その振率行列は $(2,0)$ 型であり，その曲率行列は $(1,1)$ 型である．この接続は**エルミート接続**とよばれる．

定義 5.2 エルミート多様体 M のケーラー形式 $\widehat{H}$ が，閉外微分形式，すなわち

$$d\widehat{H} = 0 \tag{5.18}$$

であるならば，M は**ケーラー多様体**とよばれる．

定理 5.2 エルミート多様体 M がケーラー多様体であるための必要十分条件は，M 上のエルミート接続の振率行列が 0 になることである．

証明 明らかに，上記の定理の条件は標構のとり方によらない．したがって，自然標構 (5.1) に関して定理を証明すれば十分である．(5.1) の双対標構場を

$$\sigma = \left(dz^1, \ldots, dz^m\right)$$

としよう．このとき $d\sigma = 0$ となる．エルミート接続は $\omega = \partial H \cdot H^{-1}$ なので，振率行列 τ が 0 となるための必要十分条件は，H は (5.2) で与えられたものとして，

$$\sigma \wedge \partial H = 0, \tag{5.19}$$

または，

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} \frac{\partial h_{i\overline{k}}}{\partial z^j} dz^j \wedge dz^i = 0, \\ &\frac{\partial h_{i\overline{k}}}{\partial z^j} - \frac{\partial h_{j\overline{k}}}{\partial z^i} = 0, \qquad 1 \le i, j, k \le m \end{aligned} \tag{5.20}$$

である．しかし，ケーラー形式 $\widehat{H}$ の外微分は

$$\begin{aligned} d\widehat{H} &= \frac{i}{2}\left(\frac{\partial h_{i\overline{k}}}{\partial z^j} dz^j + \frac{\partial h_{i\overline{k}}}{\partial \overline{z}^j} d\overline{z}^j\right) \wedge dz^i \wedge d\overline{z}^k \\ &= \frac{i}{2}\left\{\frac{\partial h_{i\overline{k}}}{\partial z^j} dz^j \wedge dz^i \wedge d\overline{z}^k - \overline{\frac{\partial h_{\overline{i}k}}{\partial z^j} dz^j \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^i}\right\} \end{aligned} \tag{5.21}$$

となる．したがって，$d\widehat{H} = 0$ は (5.20) と同値であることがわかる． □

ところで，局所標構場の変換では，

$$\begin{aligned} S' &= A \cdot S, \\ \sigma &= \sigma' \cdot A, \\ \Omega' \cdot A &= A \cdot \Omega, \\ H' &= A \cdot H \cdot {}^t\overline{A} \end{aligned} \tag{5.22}$$

となり，したがって，

$$\Omega' \cdot H' = A \cdot (\Omega \cdot H) \cdot {}^t\overline{A} \tag{5.23}$$

が成り立つ．さらに，曲率行列 $\Omega \cdot H$ はエルミート反対称 (4.51) で，すなわち，

$$\Omega \cdot H = -\overline{{}^t(\Omega \cdot H)} \tag{5.24}$$

が成り立つ．

$\Omega \cdot H$ は $(1,1)$ 次微分形式の行列なので，

$$\begin{aligned} \Omega \cdot H &= \left(\Omega_{i\overline{k}}\right), \\ \Omega_{i\overline{k}} &= \sum_{j,l} R_{i\overline{k}j\overline{l}} \sigma^j \wedge \overline{\sigma}^l \end{aligned} \tag{5.25}$$

とおこう．(5.24) より

$$\Omega_{i\overline{k}} = -\overline{\Omega}_{k\overline{i}} \tag{5.26}$$

となり，したがって

$$\begin{aligned} R_{i\overline{k}j\overline{l}} \sigma^j \wedge \overline{\sigma}^l &= -\overline{R}_{k\overline{i}j\overline{l}} \overline{\sigma}^j \wedge \sigma^l \\ &= \overline{R}_{k\overline{i}l\overline{j}} \sigma^j \wedge \overline{\sigma}^l \end{aligned}$$

である．すなわち，

$$R_{i\overline{k}j\overline{l}} = \overline{R}_{k\overline{i}l\overline{j}} \tag{5.27}$$

が成り立つ．

$A = \left(A_i^j\right)$ とおくと，(5.23) は

$$\Omega'_{i\overline{k}} = \sum_{p,q} A_i^p \overline{A}_k^q \Omega_{p\overline{q}}$$

となる．ここで，$\Omega' \cdot H' = \left(\Omega'_{i\overline{k}}\right)$ である．さらに，

$$\Omega'_{i\overline{k}} = \sum_{j,l} R'_{i\overline{k}j\overline{l}} \sigma'^j \wedge \overline{\sigma}'^l$$

とおくと，

$$R'_{i\bar{k}j\bar{l}} = \sum_{p,q,u,v} A_i^p \overline{A}_k^q A_j^u \overline{A}_l^v R_{p\bar{q}u\bar{v}} \tag{5.28}$$

が成り立つ．ところで，点 $x \in M$ において，標構場 S と S' に関して成分がそれぞれ ξ^i と ξ'^i である (1,0) 型の接ベクトル ξ に対して，

$$\xi^i = \sum_j A_j^i \xi'^j \tag{5.29}$$

とかけるので，

$$\sum_{i,j,k,l} R'_{i\bar{k}j\bar{l}} \xi'^i \overline{\xi}'^k \xi'^j \overline{\xi}'^l = \sum_{p,q,u,v} R_{p\bar{q}u\bar{v}} \xi^p \overline{\xi}^q \xi^u \overline{\xi}^v \tag{5.30}$$

が成り立ち，上記の式は，局所標構場のとり方によらないことがわかる．したがって，(1,0) 型の接ベクトル $\xi \neq 0$ に対して，以下の式で与えられる値

$$R(x,\xi) = \frac{2 \sum_{i,k,j,l} R_{i\bar{k}j\bar{l}} \xi^i \overline{\xi}^k \xi^j \overline{\xi}^l}{\left(\sum_{i,k} h_{i\bar{k}} \xi^i \overline{\xi}^k \right)^2} \tag{5.31}$$

は，(x,ξ) におけるエルミート多様体 M の**正則断面曲率**とよばれる．

(5.22) の第 3 式より，

$$\mathrm{Tr}\,\Omega' = \mathrm{Tr}\,\Omega \tag{5.32}$$

となり，$\Phi = \mathrm{Tr}\,\Omega$ は M 上の大域的な (1,1) 次微分形式であり，エルミート多様体 M の**リッチ形式**とよばれる．

行列 H^{-1} の元 $h^{i\bar{k}}$ に対して，

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{i\bar{k}j\bar{l}} h^{i\bar{k}} h^{j\bar{l}} \tag{5.33}$$

も局所標構場のとり方に依存しないので，

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \sum_{i,k,j,l} \overline{R}_{i\bar{k}j\bar{l}} \overline{h^{i\bar{k}}}\, \overline{h^{j\bar{l}}} \\ &= \sum_{i,k,j,l} R_{k\bar{i}l\bar{j}} h^{k\bar{i}} h^{l\bar{j}} \\ &= R \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，(5.33) は M 上の実数値関数であり，エルミート多様体の**スカラー曲率**とよばれる．

位相幾何学的には，コンパクトなケーラー多様体は非常に強い制限をみたしている．例えば，コンパクトなケーラー多様体の第2ベッチ数は0にはならない．なぜならば，ケーラー形式 $\widehat{H}$ は実数値閉外微分形式であるからである．よって，それは第2ド・ラムのコホモロジー群 $H^2(M,\mathbb{R})$ の元 u を定める．ここで $u \neq 0$ であることは容易にわかる．実際，ケーラー形式の局所表現

$$\widehat{H} = \frac{i}{2}\sum_{i,k} h_{i\overline{k}} dz^i \wedge d\overline{z}^k$$

より

$$\widehat{H} = \left(\frac{i}{2}\right)^m m!\,(\det H) \bigwedge_k \left(dz^k \wedge d\overline{z}^k\right)$$

となる．したがって，行列 H は正定値であり，$\det H > 0$ と

$$\int_M \widehat{H}^m > 0$$

が成り立つ．$\widehat{H}^m(u)$ は u の m 個のカップ積である $H^{2m}(M,\mathbb{R})$ の元 u^m に対応し，$\int_M \widehat{H}^m$ は M の基本類上のコホモロジー類 u^m の値である．したがって，$u^m \neq 0$, $u \neq 0$ となり，よって上記の結論が成り立つ．

さて，M と N をそれぞれ m, n 次元の複素多様体とし，$f: M \longrightarrow N$ を正則写像としよう．$m \leq n$ で，f のヤコビ行列の階数がいたるところ m ならば，f を**はめ込み**とよぶ．さらに f が1対1関数，すなわち，任意の $x \neq y \in M$ に対して $f(x) \neq f(y)$ ならば，f を**埋め込み**とよぶ．

定理 5.3　N をケーラー多様体とし，$f: M \longrightarrow N$ を正則はめ込みとしよう．このとき，N より M にケーラー構造が誘導される．

証明　$p \in M$ とし，N の点 $q = f(p)$ における複素座標を $\left(z^1, \ldots, z^n\right)$ で，M の点 p における複素座標を $\left(w^1, \ldots, w^m\right)$ としよう．このとき，写像 f の局所表現は

$$z^\alpha = f^\alpha\left(w^1, \ldots, w^m\right)$$

である．

N のエルミート構造を

$$H = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha d\overline{z}^\beta$$

とおくと，ケーラー形式は

$$\widehat{H} = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

となり，$d\widehat{H}=0$ となる．ここで

$$h'_{i\overline{j}}=\sum_{\alpha,\beta}\left(h_{\alpha\overline{\beta}}\circ f\right)\frac{\partial z^{\alpha}}{\partial w^{i}}\frac{\partial\overline{z}^{\beta}}{\partial\overline{w}^{j}}$$

とすると，行列 $H'=\left(h'_{i\overline{j}}\right)$ も正定値であり，M 上のケーラー形式が

$$\widehat{H}'=\frac{i}{2}\sum_{i,j}h'_{i\overline{j}}dw^{i}\wedge d\overline{w}^{j}$$

となるような正定値エルミート構造

$$H'=\sum_{i,j}h'_{i\overline{j}}dw^{i}d\overline{w}^{j}$$

を誘導する．明らかに，

$$\widehat{H}'=f^{*}\widehat{H}$$

となり，

$$d\widehat{H}=d\circ f^{*}\widehat{H}=f^{*}\left(d\widehat{H}\right)=0$$

が成り立つ．

したがって，複素多様体 M は，誘導されたエルミート構造 H' に関してケーラー多様体となる． □

8

フィンスラー幾何学

§8-1 はじめに

正定値 (少なくとも非退化) 2 次微分形式

$$ds^2 = G = g_{ij}(u)du^i \otimes du^j$$

の計量幾何学であるリーマン幾何学は第 5 章に解説した．ここで双対基底 u^i は局所座標で，$g_{ij} = g_{ji}$ はリーマン多様体上の滑らかな関数である．

本章では，上述の 2 次形式にこだわらない，より一般的な場合を考えよう．つまり

$$ds = F(u^1, \ldots, u^m; du^1, \ldots, du^m) \tag{1.1}$$

の場合である．ここで，$F(x; y)$ は**フィンスラー関数** (または**基本関数**) とよばれる滑らかで非負な $2m$ 変数の関数であり，0 になるのは $y = 0$ の場合に限る．さらに，$F(x; y)$ は y に関して対称な 1 次斉次関数である条件を満足している．すなわち，

$$F(x^1, \ldots, x^m; \lambda y^1, \ldots, \lambda y^m) = |\lambda| F(x^1, \ldots, x^m; y^1, \ldots, y^m), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

が成り立つ．

この場合については，すでに Riemann によって 1854 年の大学教員資格の就任講演[1)]で述べられている．したがって，(1.1) に基づく幾何学はリーマン–フィンスラー幾何学とよんだほうが正しい．しかし，本章では，1918 年の Finsler の学位論文があるので，古典的な名称であるフィンスラー幾何学を用いること

1) この有名な講演の英語訳やさまざまなコメントは Spivak, Vol.II, 1979, 第 4A, 4B 章を参照．また，そのフィンスラー幾何学における展開は Chern 1996(a) を参照のこと．

とする．フィンスラー幾何学の由来は，積分計算のもっとも基本的な概念，すなわち弧長計算にある．

(1.1) の一般性がさまざまな応用にとって不可欠である．例えば，固体物理学では格子を利用するが，その幾何学は自然にフィンスラー幾何学となる．また，複素多様体ではカラテオドリー計量や小林計量といった内在的な計量があり，それらは一般的にリーマン計量ではなく，フィンスラー計量である．(最近のフィンスラー幾何学における応用の概説については Bao, Chern, and Shen 1996 を参照).

本章の内容は，1948 年の S.S.Chern による研究に基づいている (Chern 1948 を参照)．それは長い間無視されていたが，近年のフィンスラー幾何学における仕事の中で著しい発展への道を開いた (Bao and Chern 1993，Chern 1996(a), (b), (c) を参照)．本章では，この研究に由来するいくつかの注目すべき概念を紹介し，幾何学を学ぶには，フィンスラー幾何学からはじめるほうがリーマン幾何学から学習するより自然であるということを述べる．

Riemann 自身も認識していなかったと思われる基本的なアイデアは，フィンスラー多様体 M 上に，従来の接束 TM ではなく，射影化接束 PTM，あるいは，球束 SM を考えることである．PTM や SM との違いについては本書の目標を大きく超えるので省略する．ただし，幾何学的な観点からいうと PTM はもっとも自然で簡単であるが，理論や応用の観点からいうと SM はより広いフィンスラー空間のクラスを導びく．本書では，簡単のため PTM を用いることとしたが，SM の場合にも多くのおもしろい結果がある (SM の場合の詳しい説明は，Bao, Chern, and Shen, 2000 を参照).

さて，PTM の標準引き戻し束 $p^*TM \to PTM$ には動標構が導入できる．ヒルベルト形式とよばれる余標構場の特別な切断は PTM 上に接触構造を定める．ヒルベルト形式やその余標構場の外微分によって，チャーン接続とよばれる特別な性質をもつ，一意で捩率 0 で “概計量的” な接続が得られる．この接続は，リーマン幾何学のレビ・チビタ接続の一般化であり，フィンスラー幾何学における同値問題の解にもなっている．

チャーン接続の捩率 0 と “適合している” 計量接続から，リーマン幾何学の場合と同じ形の，フィンスラー幾何学における弧長の第 1 変分および第 2 変分が得られる．この理由で，曲率とリーマン多様体の位相との間の関係を示す多くの重要な定理がフィンスラー幾何学の場合に容易に一般化できる．

上記のアイデアをこれから詳細に説明していく．本章の中心となっている定

理 3.1 と 3.2 (チャーンの定理) にチャーン接続の存在とその性質がまとめられている.

§8-2　射影接束 PTM 上の幾何学とヒルベルト形式

本章では，特に断らない限り m を除く下付添字のラテン文字は 1 と m の間を動き，下付のギリシャ文字は 1 と $m-1$ の範囲を動くとする．ここで，m はフィンスラー多様体の次元を表す.

定義 2.1　M を m 次元多様体とする．任意の曲線 $t \mapsto (u^1(t), \ldots, u^m(t))$ $(a \leq t \leq b)$ の長さ s が

$$s = \int_a^b F\left(u^1, \ldots, u^m; \frac{du^1}{dt}, \ldots, \frac{du^m}{dt}\right) dt \tag{2.1}$$

で与えられるとき，M を**フィンスラー多様体**という．ここで，関数 F は前節の (1.1) の性質をみたしているとする.

注意．関数 F の 1 次斉次性は，弧長 s が曲線のパラメーターのとり方に依存しないことと同値である.

フィンスラー多様体 M の接束 π : $TM \to M$ と余接束 π^* : $T^*M \to M$ をとる．このとき，0 ではないベクトルの実定数倍のベクトルを同一視すると，TM より，M の**射影化接束** PTM が得られる．幾何学的に，PTM は M 上の線素の空間である．よって，0 でない接ベクトルは

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \qquad (X^i \text{ はすべてが } 0 \text{ ではない})$$

と表せる．ここで，u^i, X^i は TM 上の局所座標である．実定数倍を除き一意に決まる X^i は斉次座標なので，それらは，PTM 上の局所座標でもある.

基本的なアイデアというのは, 底空間 PTM をもつ引き戻しベクトル束 p^*TM を考えることである．ここで，p : $PTM \to M$ は

$$p(u^i, X^i) = (u^i)$$

であり，p^*TM のファイバーは m 次元ベクトル空間で，多様体 PTM の次元は $2m-1$ である (図 14 参照)．関数 $F(u^i, X^i)$ は X^i に関して 1 次斉次なの

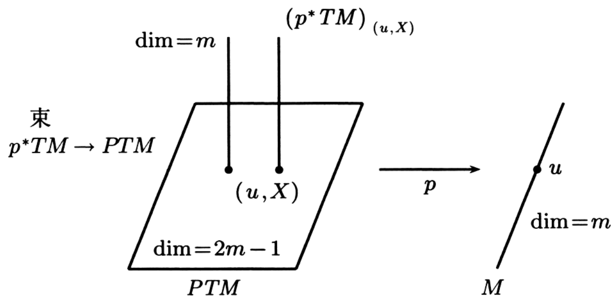


図 14

で，斉次関数における**オイラーの定理**より

$$X^i \frac{\partial F}{\partial X^i} = F \tag{2.2}$$

となり，これをさらに微分すれば，

$$X^i \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} = 0 \tag{2.3}$$

が得られる．(2.3) より $\frac{\partial F}{\partial X^i}$ は X^i に関して 0 次斉次関数である．これらは，PTM 上の関数である．

(v^j, Y^j) を PTM 上の別の局所座標系としよう．このとき，

$$Y^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} X^j \tag{2.4}$$

が成り立ち，よって

$$\frac{\partial F}{\partial X^i} = \frac{\partial F}{\partial Y^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \tag{2.5}$$

である．したがって，1 次形式

$$\omega \equiv \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i = \frac{\partial F}{\partial Y^i} dv^i \tag{2.6}$$

は局所座標系のとり方に依存しない．よって，それは PTM 上の内在的なものであるということがわかる．これは**ヒルベルト形式**とよばれる．オイラーの定理 (式 (2.2)) より，M 上の弧長積分 (2.1) はヒルベルト積分不変量

$$s = \int_a^b \omega \tag{2.7}$$

としてかけるものである.

ヒルベルト形式は非常に便利な量であり，例えば，その外微分により特別な性質をもつ接続が得られる (次節を参照). 変分計算におけるこの 1 次形式の幾何学的重要性は，Hilbert 自身が 1900 年に発表したその有名な第 23 問題[2)]の中で認めている.

次に，動標構を用いて外微分 $d\omega$ を計算しよう. この計算そしてこれから行う計算のほとんどは，ベクトル束 p^*TM の底空間は PTM であることに注目しよう. したがって，これから用いる外微分形式はすべて PTM 上の形式である. PTM 上の微分形式というのは，実定数倍のベクトル X^i 倍に対して不変であり，$X^i\frac{\partial}{\partial X^i}$ [3)]を作用させると 0 になるという条件をみたす TM 上の微分形式としてかけるものである. よって，PTM 上の微分形式をこのように表示し，PTM 上の外微分は TM 上の微分と同じであると考える.

ここで，

$$e_i = p_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{2.8}$$

---

2) ヒルベルトの第 23 問題とフィンスラー幾何学との間の関係については Chern 1996(c) を参照.

3) (u^i, X^i) $(i = 1, \ldots, m)$ を PTM 上の局所座標とし，X^i を斉次座標としよう.

$$\omega = f_i\, dX^i + g_i\, du^i$$

は，0 でない実定数倍のベクトル X^i に対して不変であり，さらに $X^i\frac{\partial}{\partial X^i}$ に対して 0 であるという条件をみたす TM 上の 1 次形式であるとしよう. このとき，

$$f_i X^i = 0,$$
$$f(\lambda X^i) = \frac{1}{\lambda} f(X^i), \qquad \lambda \neq 0$$

となり，

$$g_i(u^j, \lambda X^k) = g_i(u^j, X^k), \qquad \lambda \neq 0$$

が成り立つ. 上記の $f_i X^i = 0$ より

$$f_m = -\frac{f_\alpha X^\alpha}{X^m}$$

が得られ，

$$\begin{aligned}
\omega &= f_\alpha dX^\alpha + f_m dX^m + g_i du^i \\
&= f_\alpha \left(dX^\alpha - \frac{X^\alpha}{X^m} dX^m \right) + g_i du^i \\
&= X^m f_\alpha(u^i, X^i) d\left(\frac{X^\alpha}{X^m}\right) + g_i(u^j, X^k) du^i \\
&= f_\alpha \left(u^i, \frac{X^\beta}{X^m}\right) d\left(\frac{X^\alpha}{X^m}\right) + g_i\left(u^j, \frac{X^\beta}{X^m}\right) du^i, \qquad X^m \neq 0
\end{aligned}$$

は PTM 上の 1 次形式となる.

を p^*TM 上の直交標構とし,

$$\omega^j = q^j_k du^k \tag{2.9}$$

をその双対余標構とする．このとき,

$$\begin{aligned}(e_i, e_j) &\equiv p^l_i g_{lk} p^k_j = \delta_{ij},\\ \langle e_i, \omega^j \rangle &= \delta^j_i\end{aligned} \tag{2.10}$$

が成り立つ.

上記の前者の式は正規直交条件であり，後者は

$$p^j_i q^k_j = \delta^k_i \tag{2.11}$$

と同値である双対条件である．よって，行列 (p^j_i) と (q^k_j) は互いに逆行列である．上記の正規直交性は，PTM の内在的な対称共変 2 テンソル

$$\begin{aligned}G &= g_{ij} du^i \otimes du^j\\ &\equiv \frac{\partial^2(\frac{1}{2}F^2)}{\partial X^i \partial X^j} du^i \otimes du^j\\ &= \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial F}{\partial X^i}\frac{\partial F}{\partial X^j} \right) du^i \otimes du^j\end{aligned} \tag{2.12}$$

に対してであり，これを**基本テンソル**という．このテンソルが正定値 (強凸性) の場合，**フィンスラー計量**とよぶ.

注意. リーマン計量の場合,

$$F^2(u^i, X^i) = g_{ij}(u) X^i X^j \tag{2.13}$$

となる．ただし，ここで g_{ij} は u^i のみの関数である．フィンスラー計量の場合，(2.12) の g_{ij} は，一般的に u^i と X^i の関数であり，X^i に関して 0 次斉次関数である．よって，g_{ij} は PTM 上の関数である.

したがって，p^*TM と p^*T^*M に大域的断面

$$e_m = \frac{X^i}{F} \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2.14}$$

と

$$\omega^m = \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i = \omega \tag{2.15}$$

がそれぞれ存在する．よって，

$$q_k^m = \frac{\partial F}{\partial X^k}, \qquad p_m^l = \frac{X^l}{F} \tag{2.16}$$

が成り立ち，さらに (2.11) を用いると

$$q_k^\alpha X^k = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial X^k} p_\alpha^k = 0 \tag{2.17}$$

が得られる．(2.8) の直前の議論，および $\frac{\partial F}{\partial X^i}$ が X に関して 0 次斉次関数であることによって，$q_k^\alpha(u^i, X^j)$ も X に関して 0 次斉次関数ならば ω^i $(i = 1, \ldots, m)$ は PTM 上の 1 次形式となる．

ヒルベルト形式 ω^m を PTM 上で外微分すれば，

$$\begin{aligned} d\omega^m &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^k} du^i \wedge du^k + \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k} dX^j \wedge du^k \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^k} p_j^i p_l^k \omega^j \wedge \omega^l + \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k} p_l^k dX^j \wedge \omega^l \end{aligned} \tag{2.18}$$

が得られる．上記の式では，オイラーの定理 (式 (2.3)) より最後の項が 0 となるので，

$$d\omega^m = \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^m \tag{2.19}$$

が得られる．ここで，1 次形式 w_α^m のもっとも一般的な形は

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^m = -p_\alpha^i \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} dX^j + \frac{p_\alpha^i}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} - X^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j} \right) \omega^m \\ + p_\alpha^i p_\beta^j \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^j} \omega^\beta + \lambda_{\alpha\beta} \omega^\beta; \qquad \alpha = 1, \ldots, m-1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

である．なお，上記の係数 $\lambda_{\alpha\beta}$ は $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$ をみたす任意の関数である．これらは次節におけるチャーン接続の議論 (式 (3.26)) の中で計算される．

次に，ヒルベルト形式の重要な性質に注目しよう．

補題 1　PTM 上のヒルベルト形式

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i$$

は，条件

$$\omega \wedge (d\omega)^{m-1} \neq 0 \tag{2.21}$$

をみたす.

証明 $A=\omega\wedge(d\omega)^{m-1}$ としよう. $d\omega$ は (2.19), ω_α^m は (2.20) および $\omega^m=\omega$ より

$$A=\pm(m-1)!\bigwedge_i\omega^i\bigwedge_\alpha\omega_\alpha^m$$
$$=\pm(m-1)!\bigwedge_i\omega^i\bigwedge_\alpha p_\alpha^j\frac{\partial^2 F}{\partial X^j\partial X^k}dX^k \tag{2.22}$$

となる. (2.20) の ω_α^m における ω^m と ω^β を含む項は, 外積の歪対称性より消える. (2.12) と (2.17) より, A は

$$A=\pm\frac{(m-1)!}{F}\bigwedge_i\omega^i\bigwedge_\alpha p_\alpha^j\left(g_{jk}-\frac{\partial F}{\partial X^j}\frac{\partial F}{\partial X^k}\right)dX^k$$
$$=\pm\frac{(m-1)!}{F}\bigwedge_i\omega^i\bigwedge_\alpha p_\alpha^j g_{jk}dX^k \tag{2.23}$$

とかける. ここで強凸性, すなわち g_{ij} は正定値より, $g_{jk}dX^k$ $(j=1,\ldots,m)$ は PTM 上の 1 次独立な 1 次形式となる. 行列 p_i^j は正則行列なので, $p_i^j g_{jk}dX^k$ は正則である. よって, $(m-1)$ 個の 1 次形式 $p_\alpha^j g_{jk}dX^k$ $(\alpha=1,\ldots,m-1)$ も部分集合として 1 次独立である. よって, ω^i は dX^k (式 (2.9) 参照) を含まないことがわかり, $(2m-1)$ 個の 1 次形式 ω^i と $p_\alpha^j g_{jk}dX^k$ は 1 次独立である. したがって, 第 2 章の定理 3.3 より本補題が成り立つ. □

ω に 0 でない滑らかな関数をかけても (2.21) が成り立つ. 一般に, $(2m-1)$ 次元多様体に (2.21) をみたす 1 次形式 ω (ただし ω の関数倍は同一視) が存在する場合, それを**接触構造**といい, 1 次形式 ω を**接触形式**という. したがって, 多様体 PTM は接触構造をもつことがわかる.

注意. 奇数 $(2m-1)$ 次元多様体上の接触構造と, $2m$ 次元多様体に閉非退化 2 次形式のある偶数 $2m$ 次元多様体上の**シンプレクティック構造**との間に密接な関係がある. PTM 上にヒルベルト形式 ω が与えられたとき, 底空間 PTM をもち, $p\in PTM$ におけるファイバー $\lambda\omega_p$ $(\lambda\neq 0)$ をもつ直線束をつくることができる. この $2m$ 次元束 S を PTM の**シンプレクティック化**という. そして S 上に標準的な 1 次形式 ω', すなわち

$$\omega'_{p'}(T')=p'(\pi_*T'),\qquad p'\in S,\ T'\in T_{p'}S$$

が定義できる. ここで, $\pi: S\to PTM$ は射影 $(p,\lambda\omega_p)\mapsto p$ $(\lambda\neq 0)$ である. ω から誘導される S 上の一意のシンプレクティック構造は, 非退化 2 次形式 $d\omega'$ で与えられている. その非退化性は, ω のみたす条件 (2.21) よりわかる.

§8-3　チャーン接続

フィンスラー多様体 M に関連する空間の間には次の関係が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccc} q^*TM & \longrightarrow & p^*TM & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ TM & \xrightarrow[h]{} & PTM & \xrightarrow[p]{} & M \end{array}$$

ここで，$q = p \circ h$ である．束 q^*TM を計算の途中で用いるところもあるが，第 2 列目の束を主に注目する ((2.8) の直後の議論と §8–3.3 を参照).

§8–2 でも述べたように，束 $p^*TM \to PTM$ のファイバーは m 次元ベクトル空間であり，これは PTM 上の関数 g_{ij} $(\det(g_{ij}) \neq 0)$ によって与えられる内積をもつ．正規直交性および双対条件 (2.10) をみたす直交標構場 $\{e_i\}$ (式 (2.8)) とその双対余標構場 $\{\omega^i\}$ (式 (2.9)) を選ぶと，束接続は

$$De_i = \omega_i^j e_j \tag{3.1}$$

である．ここで，ω_i^j は PTM 上の 1 次形式の行列である．ここで内在的なテンソル場 $e_i \otimes \omega^i$ を用いると，そのカルタン共変微分が 0 になる．すなわち

$$D(e_i \otimes \omega^i) = \omega_i^j e_j \wedge \omega^i + e_i d\omega^i = 0, \tag{3.2}$$

あるいは,

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \tag{3.3}$$

が成り立つとき，この接続は**捩率 0** であるという (第 5 章の (1.37) を参照).

本節では，フィンスラー多様体 M に対して，束 $p^*TM \to PTM$ 上に捩率 0 の接続が一意に存在することを示す．この接続はリーマン幾何学のレビ・チビタ接続の一般化であり，したがって，リーマン幾何学はフィンスラー幾何学の特殊な場合であるということになる．

§8-3.1　チャーン接続の決め方

捩率 0 の接続を決定するのは，(3.3) をみたす接続形式を決定することと同値である．$i = m$ の場合，$d\omega^m$ は (2.19) で与えられている．ω_α^m は (2.20) で与えられ

$$\omega_m^m = 0 \tag{3.4}$$

と選ぶと，(2.19) と (3.3) の $d\omega^m$ の表現は同じとなる．

1 次形式 (2.9) を外微分し，(2.16), (2.17) を用いると，

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= dq_k^\alpha \wedge du^k = p_i^k dq_k^\alpha \wedge \omega^i \\ &= -q_k^\alpha dp_\beta^k \wedge \omega^\beta - q_k^\alpha dp_m^k \wedge \omega^m \\ &= \omega^\beta \wedge (q_k^\alpha dp_\beta^k) + \omega^m \wedge \left(\frac{1}{F} q_k^\alpha dX^k\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

が得られる．よって，

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^m \wedge \omega_m^\alpha \tag{3.6}$$

が成り立つ．ここで，1 次形式 ω_β^α と ω_m^α のもっとも一般的な形は

$$\omega_\beta^\alpha = q_k^\alpha dp_\beta^k + \xi_\beta^\alpha \omega^m + \mu_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma, \tag{3.7}$$

$$\omega_m^\alpha = \frac{1}{F} q_k^\alpha dX^k + \xi_i^\alpha \omega^i \tag{3.8}$$

である．なお，係数 $\mu_{\beta\gamma}^\alpha$ は下付添字に対して対称である任意の関数であり，ξ_i^α は完全に任意の関数である．

ところで，$\omega_m^m = 0$ (式 (3.4)) であるので，$d\omega^m$ の式 (2.19) と $d\omega^\alpha$ の式 (3.6) は (3.3) としてまとめてかける．したがって，$P^*TM \to PTM$ 上に捩率 0 の接続の存在が示された．ここまでの結果をまとめよう．

定理 3.1 (Chern)　M をフィンスラー関数 F をもつフィンスラー多様体とする．$e_i = p_i^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ $(i = 1, \ldots, m)$ を束 $p^*TM \to PTM$ 上の正規直交標構場，$\omega^i = q_j^i du^j$ を $p^*T^*M \to PTM$ 上のその双対余標構場とし，それらは，特別な大域断面

$$e_m = \frac{X^i}{F}\frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad \omega^m = \frac{\partial F}{\partial X^i} du^i$$

をもつとしよう．ここで，u^i と X^i は M 上と TM 上それぞれの局所座標である．このとき，$p^*TM \to PTM$ 上に捩率 0 の接続

$$D : \Gamma\big(p^*TM\big) \to \Gamma\big(p^*TM \otimes T^*(PTM)\big)$$

が存在する．ここで $De_i = \omega_i^j e_j$, $\omega_m^m = 0$ である．なお，接続形式 ω_i^j は捩率 0 の構造方程式

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$$

を満足する．

さて，ω_α^m と ω_m^α に対して，条件

$$\omega_\alpha^m + \omega_m^\alpha = 0 \tag{3.9}$$

を課すことによって，(3.7), (3.8) の ξ_i^α を確定しよう．この条件と $\omega_m^m = 0$ より，1 次形式の行列 ω_i^j は最後の行と最後の列で歪対称になる．

注意．この後で述べるように ((3.46) と関連する議論を参照)，(3.9) は，平行移動に対して $G(e_i, e_m)$ は一定である，すなわち $DG(e_i, e_m) = 0$ である，という幾何学的な意味をもつ．

(2.20) と (3.8) を用いると，(3.9) は

$$\left(\frac{\delta_{\alpha\sigma} q_j^\sigma}{F} - p_\alpha^i \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) dX^j + \left\{\delta_{\alpha\sigma}\xi_m^\sigma + \frac{p_\alpha^i}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i} - X^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j}\right)\right\}\omega^m + \left(\delta_{\alpha\sigma}\xi_\beta^\sigma + p_\alpha^i p_\beta^j \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial X^j} + \lambda_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta = 0 \tag{3.10}$$

とかける．上記の式では

$$\delta_{\alpha\sigma} q_j^\sigma - p_\alpha^i F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} = \delta_{\alpha\sigma} q_j^\sigma - p_\alpha^i \left(g_{ij} - \frac{\partial F}{\partial X^i}\frac{\partial F}{\partial X^j}\right) = 0 \tag{3.11}$$

が成り立つので，dX^j の係数は 0 になる．ここで，まず g_{ij} の定義 (2.12)，および (2.17) と正規直交条件 (2.10) を用いた．ω^m と ω^β は 1 次独立な 1 次形式なので，(3.10) におけるその係数は 0 となる．したがって，

$$\xi_m^\alpha = -\frac{\delta^{\alpha\sigma} p_\sigma^i}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i} - X^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j}\right), \tag{3.12}$$

$$\xi_\beta^\alpha = -\delta^{\alpha\sigma}\left(p_\sigma^i p_\beta^j \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial u^i} + \lambda_{\sigma\beta}\right) \tag{3.13}$$

が成り立つ．

(2.20) と (3.7) で導入したテンソル $\lambda_{\alpha\beta}$ と $\mu_{\beta\gamma}^\alpha$ をそれぞれを確定すると，接続 ω_j^i が決まる．そのために，(3.9) の他に，$(m-1)\times(m-1)$ 型の行列 (ω_α^β) は "概対称" であることとする．すなわち，条件

$$\omega_\rho^\alpha \delta_{\alpha\sigma} + \omega_\sigma^\alpha \delta_{\alpha\rho} = 0 \mod \omega_m^\beta \tag{3.14}$$

を課する．この条件より，ω_a^β の中から，互いに 1 次独立であり，ω_m^α に関して

も 1 次独立である高々 $(m-1)(m-2)/2$ 個の，例えば ω_α^β $(\alpha<\beta)$ を選ぶことができる．よって，まとめると，

補題 1 $(2m-1)+(m-1)(m-2)/2$ 個のパッフ形式 ω^i $(i=1,\ldots,m)$, ω_m^α $(\alpha=1,\ldots,m-1)$, ω_α^β $(\alpha,\beta=1,\ldots,m-1;\ \alpha<\beta)$ は 1 次独立であり，(2.9), (2.10), (2.15) で記述された PTM の余標構空間における外微分形式の代数の基底である．また，各点 $p\in PTM$ における $(2m-1)$ 個のパッフ形式 ω^i $(i=1,\ldots,m)$, ω_m^α $(\alpha=1,\ldots,m-1)$ は $T_p^*(PTM)$ の基底である．

注意 1. 上記の補題の 1 次独立なパッフ形式の個数はフィンスラー多様体の本質的な変数の個数の和に等しい．すなわち，PTM 上の局所座標 u^i,X^i は $(2m-1)$ 個で (X^i は斉次座標である)，正規直交動標構場 $(e_1,\ldots,e_m)$ の自由度は $(m-1)(m-2)/2$ である．ここで e_m は (2.14) で与えられている．

この自由度は以下の議論の結果として得られる．$m\times m$ 型行列 p_i^j の最後の列 (p_m^j) は (2.16) により決まる．残りの $m(m-1)$ 個の元 (p_α^i) は $(m-1)$ 個の条件 $p_\alpha^i\frac{\partial F}{\partial X^i}=0$ (式 (2.17)) を満足し，$(m-1)+(m-1)(m-2)/2=m(m-1)/2$ 個は正規直交条件 $p_\alpha^l g_{lk} p_\beta^k=\delta_{\alpha\beta}$ (式 (2.10)) を満足する．よって，必要な自由度は $m(m-1)-(m-1)-m(m-1)/2=(m-1)(m-2)/2$ である．

注意 2. 補題 1 の 1 次独立なパッフ形式はいわゆるフィンスラー幾何学における**同値問題**，すなわち二つのフィンスラー計量は局所的に同値であるかどうか，の解にもなる．$F(u^i,X^i)$，$F'(u'^i,X'^i)$ を二つのフィンスラー関数とし，対応する 1 次独立なパッフ形式をそれぞれ (ω^i,ω_j^i) と (ω'^i,ω'^j_i) としよう．このとき，F と F' は局所的に同値であるための必要十分条件は，余標構場空間の間に，

$$\omega^i=\omega'^i,\qquad \omega_i^j=\omega'^j_i$$

をみたす微分同形写像があることである (詳細は Chern 1948 を参照).

条件 (3.14) を利用するには，まず式

$$q_j^\alpha q_k^\beta\delta_{\alpha\beta}=F\frac{\partial^2F}{\partial X^j\partial X^k} \tag{3.15}$$

を PTM 上で外微分しよう．この式はフィンスラー計量 g_{ij} (式 (2.12)) の定義と (2.10) で選ばれた標構場の正規直交条件より得られる．その後，(2.11) を用いて，行列 p を 2 回掛けると，

$$\delta_{\alpha\sigma}q_i^\alpha dp_\rho^i+\delta_{\alpha\rho}q_i^\alpha dp_\sigma^i=-p_\sigma^j p_\rho^i d\left(F\frac{\partial^2F}{\partial X^i\partial X^j}\right) \tag{3.16}$$

が得られる．この式と (3.13) を (3.7) に代入すると，(3.14) の左辺は

$$\begin{aligned}
&\omega^{\alpha}_{\rho}\delta_{\alpha\sigma}+\omega^{\alpha}_{\sigma}\delta_{\alpha\rho}\\
&\quad=-p^j_{\sigma}p^i_{\rho}\left\{d\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial X^j}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^j\partial X^i}\right)\omega^m\right\}\\
&\qquad-2\lambda_{\rho\sigma}\omega^m+(\delta_{\alpha\sigma}\mu^{\alpha}_{\rho\gamma}+\delta_{\alpha\rho}\mu^{\alpha}_{\sigma\gamma})\omega^{\gamma} \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

とかける．

次に，補題 3.1 により，

$$d\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right)=S^{\alpha}_{ij}\omega^m_{\alpha}+G_{ijl}\omega^l \qquad (3.18)$$

が成り立つ．ここで，S^{α}_{ij} と G_{ijl} は双方 i, j に関して対称である．これらの値は次のように計算できる．(3.18) を $Fp^k_{\beta}\frac{\partial}{\partial X^k}$ で縮約し，ω^m_a を (2.20) に代入すると，

$$\begin{aligned}
Fp^k_{\beta}\frac{\partial}{\partial X^k}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right)&=-S^{\alpha}_{ij}p^s_{\alpha}p^k_{\beta}F\frac{\partial^2 F}{\partial X^s\partial X^k}\\
&=-S^{\alpha}_{ij}\delta_{\alpha\beta} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，(3.15) と (2.11) を用いた．よって，q の正規直交性と q と p の双対性より，

$$S^{\alpha}_{ij}=-Fq^{\alpha}_l g^{lk}\frac{\partial}{\partial X^k}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right) \qquad (3.20)$$

が成り立つ．

G_{ijm} を求めるには，(2.20) を用いて (3.18) を e_m で縮約すると，

$$G_{ijm}=\frac{-p^s_{\alpha}S^{\alpha}_{ij}}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial u^s}-X^r\frac{\partial^2 F}{\partial X^s\partial u^r}\right)+\frac{X^s}{F}\frac{\partial}{\partial u^s}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right) \qquad (3.21)$$

となる．S^{α}_{ij} を (3.20) より代入すると，上記の式の右辺は

$$\begin{aligned}
&p^s_{\alpha}q^{\alpha}_l g^{kl}\frac{\partial}{\partial X^k}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u^s}-X^r\frac{\partial^2 F}{\partial X^s\partial u^r}\right)\\
&\quad=\left(\delta^s_l-\frac{X^s}{F}\frac{\partial F}{\partial X^l}\right)g^{kl}\frac{\partial}{\partial X^k}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i\partial X^j}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u^s}-X^r\frac{\partial^2 F}{\partial X^s\partial u^r}\right)\\
&\quad=g^{ks}F\frac{\partial^3 F}{\partial X^k\partial X^i\partial X^j}\left(\frac{\partial F}{\partial u^s}-X^r\frac{\partial^2 F}{\partial X^s\partial u^r}\right) \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

とかける．ここで，この第二式には

$$
\begin{aligned}
g^{kl}\frac{\partial F}{\partial X^l} &= p^k_c \delta^{cd} p^l_d \frac{\partial F}{\partial X^l} \\
&= p^k_m p^l_m \frac{\partial F}{\partial X^l} \\
&= \frac{X^k X^l}{F^2}\frac{\partial F}{\partial X^l} = \frac{X^k}{F}
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

と

$$
\frac{X^s}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial u^s} - X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^s \partial u^r}\right) = 0 \tag{3.24}
$$

とオイラーの定理 (式 (2.2)) を用いた．よって (3.21), (3.22) より

$$
\begin{aligned}
G_{ijm} = g^{ks} F \frac{\partial^3 F}{\partial X^k \partial X^i \partial X^j}\left(\frac{\partial F}{\partial u^s} - X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^s \partial u^r}\right) \\
+ X^s \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial X^i \partial X^j} + \frac{X^s}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial u^s}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right)
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

が得られる．

(3.18) を (3.17) の右辺に代入し，(3.14) を用い，ω^m の係数を 0 とすると，$\lambda_{\alpha\beta}$ は G_{ijm} で表せる．すなわち，

$$
\lambda_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} p^i_\rho p^j_\sigma \left(G_{ijm} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial u^i} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j}\right) \tag{3.26}
$$

となる．同じ式で，ω^γ の係数を 0 とすると，

$$
\delta^{\alpha\beta} p^i_\rho p^j_\sigma G_{ij\beta} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{\nu\sigma}\mu^\nu_{\rho\beta} + \delta^{\alpha\beta}\delta_{\nu\rho}\mu^\nu_{\sigma\beta} \tag{3.27}
$$

が得られる．添字 (ρ, σ, β) の巡回置換によって，上記と同様な式が二つ得られる．それらと (3.27) を加えると，

$$
\mu^\alpha_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\left(p^i_\beta p^j_\rho G_{ij\sigma} - p^i_\rho p^j_\sigma G_{ij\beta} + p^i_\sigma p^j_\beta G_{ij\rho}\right) \tag{3.28}
$$

が成り立つ．

あとは，$G_{ij\beta}$ の式が残っている．これを決定するには，まず (3.18) を e_β と縮約すると，

$$
G_{ij\beta} = -S^\alpha_{ij}\langle \omega^m_\alpha, e_\beta \rangle + p^k_\beta \frac{\partial}{\partial u^k}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) \tag{3.29}
$$

が得られ，そして，S^α_{ij} を (3.20) より，$\lambda_{\alpha\beta}$ を (3.26) より代入し，(3.23) と恒

等式

$$q_l^\alpha p_\alpha^r = \delta_l^r - q_l^m p_m^r = \delta_l^r - \left(\frac{\partial F}{\partial X^l}\right)\left(\frac{X^r}{F}\right)$$

とオイラーの定理

$$X^k \frac{\partial^3 F}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k} = -\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
-S_{ij}^\alpha \langle \omega_\alpha^m, e_\beta \rangle &= \frac{F}{2} g^{lk} p_\beta^s \left(\delta_l^r - \frac{X^r}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial X^l}\right)\right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^r \partial X^s} - \frac{\partial^2 F}{\partial X^r \partial u^s} - G_{rsm}\right) \frac{\partial}{\partial X^k}\left(F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) \\
&= \frac{1}{2} p_\beta^s \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^r \partial X^s} - \frac{\partial^2 F}{\partial X^r \partial u^s} - G_{rsm}\right) \\
&\quad \times \left(F^2 g^{rk} \frac{\partial^3 F}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k} + X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

が得られる．よって，

$$\begin{aligned}
G_{ij\beta} = p_\beta^s \Biggl\{ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^r \partial X^s} - \frac{\partial^2 F}{\partial X^r \partial u^s} - G_{rsm}\right)\left(F^2 g^{rk} \frac{\partial^3 F}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k}\right. \\
&\left. + X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u^s}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) + F \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial X^i \partial X^j} \Biggr\}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

となる．

この式によって，接続 ω_i^j は完全に決まる．これを**チャーン接続**という．

§8-3.2　カルタンテンソルとリーマン幾何学の特徴づけ

(3.14) は

$$\begin{aligned}
\omega_\rho^\alpha \delta_{\alpha\sigma} + \omega_\sigma^\alpha \delta_{\alpha\rho} &= 2A_{\rho\sigma}^\alpha \omega_\alpha^m \\
&= -2A_{\rho\sigma\alpha} \omega_m^\alpha
\end{aligned} \tag{3.32}$$

とかける．ここで

$$A_{\rho\sigma\alpha} = A_{\rho\sigma}^\beta \delta_{\beta\alpha} \tag{3.33}$$

であり，(3.17) と (3.18) を用いると，

$$A^{\alpha}_{\rho\sigma} \equiv -\frac{1}{2}p^i_\rho p^j_\sigma S^{\alpha}_{ij} \tag{3.34}$$

が成り立つ．添字 m に対して

$$A_{ijk} = 0 \quad (\text{添字のどちらかが } m \text{ となった場合}) \tag{3.35}$$

で A_{ijk} を定義すると，(3.32) は

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = -2A_{ikj}\omega^j_m \tag{3.36}$$

とかける．ここで，

$$\omega_{ik} = \omega^j_i \delta_{jk} \tag{3.37}$$

である．

ここで (0,3) テンソル

$$A = A_{ijk}\omega^i \otimes \omega^j \otimes \omega^k \tag{3.38}$$

は**カルタンテンソル**とよばれる．

(3.34) に S^{α}_{ij} (式 (3.20)) を代入すると，A_{ijk} はフィンスラー関数 F で表せる．すなわち，(2.10) より

$$g^{lk} = p^l_r \delta^{rs} p^k_s$$

が成り立つので，

$$A_{\rho\sigma\alpha} = \frac{F}{2}p^j_\sigma p^i_\rho p^k_\alpha \left[\left(\frac{\partial F}{\partial X^k}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) + F\frac{\partial^3 F}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k}\right] \tag{3.39}$$

が得られる．しかし，(2.17) によると，この式の括弧の中の第 1 項は 0 なので，上記の式に同様な項を二つ足すことができる．すなわち，

$$\begin{aligned} A_{\rho\sigma\alpha} &= \frac{F}{2}p^j_\sigma p^i_\rho p^k_\alpha \Bigg[\left(\frac{\partial F}{\partial X^k}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial X^j}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^k}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{\partial F}{\partial X^i}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial X^k}\right) + F\frac{\partial^3 F}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k}\Bigg] \\ &= \frac{F}{2}\frac{\partial^3\left(\frac{F^2}{2}\right)}{\partial X^i \partial X^j \partial X^k}p^j_\sigma p^i_\rho p^k_\alpha \\ &= \frac{F}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}p^j_\sigma p^i_\rho p^k_\alpha \end{aligned} \tag{3.40}$$

が成り立つ．なお，(2.12) とオイラーの定理より

$$X^j \frac{\partial g_{lk}}{\partial X^j} = X^l \frac{\partial g_{lk}}{\partial X^j} = X^k \frac{\partial g_{lk}}{\partial X^j} = 0 \tag{3.41}$$

となるので，(3.40) のすべての添字を 1〜m とすることができ，最終的に

$$A_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial^3\left(\frac{F^2}{2}\right)}{\partial X^r \partial X^s \partial X^t} p_i^r p_j^s p_k^t \tag{3.42}$$

が得られる．

上記の式は，ω^i に関するカルタンテンソルの成分であることに注目しよう．よって，(2.9), (2.11), (2.12) によると

$$\begin{aligned} A_{abc} &= \frac{F}{2} \frac{\partial^3\left(\frac{F^2}{2}\right)}{\partial X^a \partial X^b \partial X^c} \\ &= \frac{F}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial X^a} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial X^c} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ac}}{\partial X^b} \end{aligned} \tag{3.43}$$

となる．ここで，

$$A = A_{abc} du^a \otimes du^b \otimes du^c \tag{3.44}$$

であり，この成分は自然基底 du^i に対するものである．明らかに，A_{ijk} と A_{abc} のどちらも完全対称である．さらに，(2.16), (3.41) に基づくと，(3.42) における A_{ijk} は，(3.35) によると，その添字どちらかが m となった場合，0 である．

ここで式

$$G = g_{ij} du^i \otimes du^j = \delta_{ij} \omega^i \otimes \omega^j \tag{3.45}$$

が成り立つので，第 4 章の (1.47) および (3.36) より，任意の与えられた $v \in TM$ に対して

$$\begin{aligned} (D_v G)(e_i, e_j) &= -\langle v, \omega_i^j \rangle - \langle v, \omega_j^i \rangle \\ &= 2A_{ijk} \langle v, \omega_m^k \rangle \end{aligned} \tag{3.46}$$

が得られる．したがって，$G(e_m, e_j)$ と $G(e_i, e_m)$ は全方向に対して共変微分が 0 であるが，$G(e_\alpha, e_\beta)$ は，$\langle v, \omega_m^k \rangle = 0$ をみたす方向 v，すなわち e_m が平行移動される方向のみに対して共変微分が 0 である．このことから，チャーン接続は**概計量的**であるという．これは，リーマン幾何学の完全計量的であるレビ・チビタ接続のフィンスラー幾何学における同様な概念とみなすことができる．

(3.42) と (3.43) より，カルタンテンソルのもっとも重要な性質が得られる．

すなわち，フィンスラー計量 G ((2.12) を参照) がリーマン計量，要するに g_{ij} は X^k によらない) ならば，カルタンテンソルは 0 である．ここまでの議論をまとめると，次のような第 5 章の定理 1.3 のフィンスラー幾何学における一般化が得られる．

定理 3.2 (Chern) フィンスラー束 $p^*TM \to PTM$ 上のチャーン接続形式 ω_i^j は，構造方程式

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \qquad (\text{捩率 } 0)$$

および

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = -2A_{ijk}\omega_m^k \qquad (\text{概計量性})$$

の一意の解である．ここで $\omega_{ij} = \omega_i^k \delta_{kj}$ であり，カルタンテンソル

$$A = A_{ijk}\omega^i \otimes \omega^j \otimes \omega^k$$

は

$$A_{ijk} = \frac{F}{2}\frac{\partial^3\left(\frac{F^2}{2}\right)}{\partial X^r \partial X^s \partial X^t} p_i^r p_j^s p_k^t$$

である．なお，フィンスラー計量 g_{ij} がリーマン計量であるための必要十分条件は，カルタンテンソルが 0 となることである．それゆえ，リーマンではないフィンスラー構造では，捩率 0 で，完全計量的な接続は存在しない．

したがって，リーマン幾何学はフィンスラー幾何学の特殊な場合になり，チャーン接続はクリストッフェル–レビ・チビタ接続の 一般化である．

§8-3.3 自然座標による接続係数の表現

はじめに，接続形式 ω_α^m を自然基底 du^i と dX^i で表そう．そのために次の量を定義する．

$$\mathcal{G} \equiv \frac{1}{2}F^2, \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_l &\equiv \frac{1}{2}\left(X^s \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial X^l \partial u^s} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u^l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(X^s \frac{\partial F}{\partial u^s}\frac{\partial F}{\partial X^l} + X^s F \frac{\partial^2 F}{\partial X^l \partial u^s} - F\frac{\partial F}{\partial u^l}\right), \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\mathcal{G}^i \equiv g^{il}\mathcal{G}_l. \tag{3.49}$$

まず，(2.9), (2.15) と (3.26) ($\lambda_{\rho\sigma}$ のため) を (2.20) に用いると，ω_a^m は

$$\omega_\alpha^m = -p_\alpha^i \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} dX^j + p_\alpha^i \left[\frac{X^j}{F} \frac{\partial F}{\partial X^k} \left(G_{ijm} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^j \partial u^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^j} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \left(G_{ikm} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial u^k} - \frac{\partial^2 F}{\partial X^k \partial u^i} \right) \right] du^k \tag{3.50}$$

とかける．さらに，(3.25) の G_{ijm} の式から，上式の大括弧の中の式は代数的な計算により

$$\frac{-g_{it}}{F} \frac{\partial \mathcal{G}^t}{\partial X^k} + \frac{1}{2F} \left(\frac{\partial F}{\partial X^i} \right) \left\{ F \frac{\partial^2 F}{\partial X^k \partial X^t} g^{tl} \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} - X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^l \partial u^r} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial F}{\partial u^k} + X^r \frac{\partial^2 F}{\partial X^k \partial u^r} \right\} \tag{3.51}$$

と表せる．これより，ω_α^m は

$$\omega_\alpha^m = -p_\alpha^i \left[\frac{g_{ij}}{F} \frac{\partial \mathcal{G}^j}{\partial X^k} du^k + \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^k} dX^k \right] \tag{3.52}$$

となる．ここで，(2.17) の第 2 式の双対条件を用いた．なお，(3.52) の ω_α^m，(3.20) の S_{ij}^α を (3.18) に代入し，そして e_k で縮約すると，自然座標における (3.25) と (3.31) を合わせた G_{ijk} の式が得られる．すなわち，

$$G_{ijk} = p_k^l \left[\frac{\partial}{\partial u^l} \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{G}^r}{\partial X^l} \frac{\partial}{\partial X^r} \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} \right) \right] \tag{3.53}$$

である．なお，上式を (3.26) と (3.28) に代入すると，$\lambda_{\rho\sigma}$ と $\mu_{\rho\sigma}^\alpha$ の自然座標における表現が得られる．

次に，自然座標 u^i, X^i $(i = 1, \ldots, m)$ を用いて $T(TM\backslash\{0\})$ と $T^*(TM\backslash\{0\})$ の標準基底をつくろう．(3.9), (2.12) と (2.10) より得られる $g_{ij} = q_i^k \delta_{kl} q_j^l$ より，(3.52) は

$$\omega_m^\alpha = q_j^\alpha \left(\frac{dX^j}{F} + N_k^j du^k \right) = q_j^\alpha \delta X^j \tag{3.54}$$

と同値であることがわかる．ここで，

$$N_j^i \equiv \frac{1}{F} \frac{\partial \mathcal{G}^i}{\partial X^j} \tag{3.55}$$

であり，

$$\delta X^j \equiv \frac{dX^j}{F} + N_k^j du^k \tag{3.56}$$

である．なお，(3.54) と (2.9) の自然基底における ω^i の表現との類似性に注意しよう．よって，$T^*(PTM)$ の基底 $\omega^i = q^i_j du^j$，ω^α_m の $T(PTM)$ における双対正規直交ベクトルは

$$\widehat{e}_i = p^j_i \frac{\delta}{\delta u^j}, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.57}$$

および

$$\widehat{e}_{m+\alpha} = p^j_\alpha \frac{\delta}{\delta X^j}, \qquad \alpha = 1, \ldots, m-1 \tag{3.58}$$

である．ここで，

$$\frac{\delta}{\delta u^i} \equiv \frac{\partial}{\partial u^i} - FN^j_i \frac{\partial}{\partial X^j}, \tag{3.59}$$

および

$$\frac{\delta}{\delta X^i} \equiv F \frac{\partial}{\partial X^i} \tag{3.60}$$

である．明らかに，基底 $\left\{\frac{\delta}{\delta u^i}, \frac{\delta}{\delta X^i}\right\}$ は $\{du^i, \delta X^i\}$ の双対基底である．これらは，$T(TM \setminus \{0\})$ および $T^*(TM \setminus \{0\})$ それぞれの局所基底である．

導入した標構場と余標構場との間の関係は表 1 のようにまとめられる．ここで，二つの列に入っている量は互いに双対であり，ベクトルと 1 次形式のそれぞれの底空間は，一番左側にかかれている．

表 1

PTM	$\omega^i = q^i_j du^j$ $\omega^\alpha_m = q^\alpha_j \delta X^j$	$\widehat{e}_i = p^j_i \dfrac{\delta}{\delta u^j}$ $\widehat{e}_{m+\alpha} = p^j_\alpha \dfrac{\delta}{\delta X^j}$
$TM \setminus \{0\}$	du^i $\delta X^i = \dfrac{dx^i}{F} + N^i_j du^j$	$\dfrac{\delta}{\delta u^i} = \dfrac{\partial}{\partial u^i} - FN^j_i \dfrac{\partial}{\partial X^j}$ $\dfrac{\delta}{\delta X^i} = F \dfrac{\partial}{\partial X^i}$

ではここで，チャーン接続

$$D : \Gamma(p^* TM) \to \Gamma\big(p^* TM \otimes T^*(TM \setminus \{0\})\big)$$

の自然座標における式，すなわち

$$D \frac{\partial}{\partial u^i} = \theta^j_i \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{3.61}$$

を計算しよう．そのために，まず θ_i^j と ω_a^b との間の関係 (ゲージ変換) を利用する．D を (3.1) に作用させると，

$$De_i = \omega_i^j e_j = D\left(p_i^k \frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

となり，

$$\omega_i^j p_j^l \frac{\partial}{\partial u^l} = dp_i^l \frac{\partial}{\partial u^l} + p_i^k \theta_k^l \frac{\partial}{\partial u^l}$$

が得られる．よって，

$$\omega_i^j p_j^l = dp_i^l + p_i^k \theta_k^l$$

が成り立ち，これを q で縮約すると，

$$\omega_i^j = q_l^j (dp_i^l + p_i^k \theta_k^l) \tag{3.62}$$

となる．同様に，

$$\theta_i^j = p_l^j (dq_i^l + q_i^k \omega_k^l) \tag{3.63}$$

も得られる．(3.62), (3.63) は第 4 章の (1.12) と同値である．これらの式より，接続形式はテンソルではないことに注意しよう．

(3.62) と双対条件 (2.11) を用いると，捩率 0 の条件 (3.3) は

$$du^i \wedge \theta_i^j = 0 \tag{3.64}$$

と同値であることが容易にわかる．したがって，チャーン接続形式 θ_i^j は dX^k の項を含まない．すなわち

$$\theta_i^j = \Gamma_{il}^j du^l \tag{3.65}$$

となる．(3.64) より，対称性

$$\Gamma_{il}^j = \Gamma_{li}^j \tag{3.66}$$

も得られる (第 4 章の定義 2.2，および (2.31) を参照)．よって，(3.61) は

$$D\frac{\partial}{\partial u^i} = \Gamma_{il}^j du^l \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{3.67}$$

とかける．ただし，D の共変微分は p^*TM と p^*T^*M のテンソル積の断面に作用するので，$D\dfrac{\partial}{\partial X^i}$ は未定義であることに注意しよう．

次に，チャーン接続の "概計量的性質" の構造方程式を自然座標で表すためには，D を

$$g_{ij} = G\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

に作用させる．すると

$$dg_{ij} = (DG)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) + G\left(D\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) + G\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, D\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \tag{3.68}$$

となる．

$$G = \delta_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$$

とおき，(3.36) を用いると，

$$\begin{aligned} DG &= -(\omega_{ik} + \omega_{ki})\omega^i \otimes \omega^k \\ &= 2A_{ikl}\omega^j_m p^l_j du^i \otimes du^k \\ &= 2A_{ijk}\delta X^k du^i \otimes du^j \end{aligned} \tag{3.69}$$

が成り立つ．ここでのカルタンテンソルの成分は自然基底 du^i ((3.43) を参照) に関してであり，第 3 番目の等式に (3.54) を用いた．したがって，

$$DG\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = 2A_{ijk}\delta X^k \tag{3.70}$$

が得られる．一方，(3.67) より

$$G\left(D\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \Gamma^k_{il} g_{kj} du^l = \Gamma_{ijl} du^l, \tag{3.71}$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, D\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \Gamma^k_{jl} g_{ik} du^l = \Gamma_{jil} du^l \tag{3.72}$$

となり，これらの式を (3.68) に代入すると，自然座標における概計量的性質の条件

$$dg_{ij} = g_{kj}\theta^k_i + g_{ik}\theta^k_j + 2A_{ijk}\delta X^k \tag{3.73}$$

が得られる．上記の du^k の係数を比較し，(3.56) を用いると，

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - 2A_{ijl}N^l_k \tag{3.74}$$

となる．dX^k の係数を比較すれば，カルタンテンソルの式 (3.43) が確認できる．

ではここで，

$$(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}) - (\Gamma_{jki} + \Gamma_{kji}) + (\Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj})$$

を計算しよう．(3.66) と (3.74) より

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right) - \frac{F}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^l}N^l_k - \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^l}N^l_j + \frac{\partial g_{jk}}{\partial X^l}N^l_i\right) \tag{3.75}$$

が得られる．ここで，N^i_j は (3.55) (以下の (3.79)) である．式

$$\Gamma^j_{ik} = g^{jl}\Gamma_{ilk} \tag{3.76}$$

を利用すると，Γ^j_{ik} の式も計算できる．

リーマン多様体と同様に，式

$$\gamma_{ijk} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right), \tag{3.77}$$

および

$$\gamma^j_{ik} \equiv \frac{g^{il}}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i}\right) \tag{3.78}$$

は，第 1 種と第 2 種クリストッフェル記号とそれぞれよばれる．今後の利用のため，N^i_j をクリストッフェル記号とカルタンテンソルで表そう．(3.55), (3.49), (3.79) を用いて，代数的な計算により

$$N^i_j = \gamma^i_{jk}\frac{X^k}{F} - A^i_{jk}\gamma^k_{rs}\frac{X^r X^s}{F^2} \tag{3.79}$$

が得られる．ここで，$A^i_{jk} = g^{il}A_{ljk}$ であり，A_{ljk} は (3.43) である．したがって，(3.41) と (3.75) より

$$\Gamma^i_{jk}\frac{X^j}{F} = N^i_k, \tag{3.80}$$

または，

$$N^i_k du^k = \theta^i_j \frac{X^j}{F} \tag{3.81}$$

が成り立つ．

(3.75) はリーマン幾何学における第 1 種クリストッフェル記号であるが，第 5 章の (1.34) と比較してみよう．リーマン計量の場合，g_{ij} は u^i の関数のみなので，テンソル

$$M_{ijk} \equiv F\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^l}N^l_k \tag{3.82}$$

は 0 であり，この場合，(3.75) の Γ_{ijk} は第 1 種クリストッフェル記号であり，

チャーン接続はクリストッフェル–レビ・チビタ接続にほかならない．したがって，M_{ijk} はチャーン接続の計量適合性のずれを表すものであると考えられる．

§8-4 構造方程式と旗曲率

本節では，チャーン接続の曲率テンソル Ω の性質を紹介する．これらは，捩率 0 と概計量的性質 (それぞれ (3.3) および (3.36)) を表す構造方程式より完全に決まる．Ω は R と P の和であり，ここで，R は §4–2 で導入したリーマン曲率テンソルの一般化である．これらの R と P はカルタンテンソルと同じく，特殊フィンスラー空間の分類に重要な役割を果している (§8–4.3 の例を参照)．

§8-4.1 曲率テンソル

チャーン接続の捩率 0 の構造方程式 (式 (3.3))

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$$

を外微分すると，

$$\omega^k \wedge \left(d\omega_k^i - \omega_k^j \wedge \omega_j^i \right) = 0 \tag{4.1}$$

が得られる．第 4 章の定義 1.2 により，2 次形式の行列

$$\Omega_k^i \equiv d\omega_k^i - \omega_k^j \wedge \omega_j^i \tag{4.2}$$

は，チャーン接続の曲率形式とよばれる．これは PTM 上の 2 次形式なので，2 次形式 $\omega^i \wedge \omega^j$ と $\omega^i \wedge \omega_m^\alpha$ の 1 次結合でかける．$\omega_m^\alpha \wedge \omega_m^\beta$ の係数は $dX^i \wedge dX^j$ に比例している (式 (3.52) より) ので，(4.1) のように捩率 0 であることより，これらも 0 である．したがって，Ω_k^i の一般式は

$$\Omega_k^i = \frac{1}{2} R_{kjl}^i \omega^j \wedge \omega^l + P_{kj\alpha}^i \omega^j \wedge \omega_m^\alpha \tag{4.3}$$

と一般性を失わないでかくことができる．ここで，

$$R_{kjl}^i + R_{klj}^i = 0 \tag{4.4}$$

の性質が成り立つ．

P の項がなければ，(4.3) はリーマン曲率 (第 4 章の (2.2) を参照) と同じである．曲率テンソルの R 項は水平–水平 (h–h) 成分とよび，P 項は水平–垂直

(h–v) 成分とよばれる．これらはそれぞれ**第 1，第 2 チャーン曲率テンソル**とよばれる．この曲率テンソルの部分は，カルタンテンソルと同様に，特殊フィンスラー空間の分類にとって重要である．カルタンテンソルが 0 ならば，そのフィンスラー構造はリーマンであるということは §8–4.2 ですでに述べた．§8–4.3 では，曲率テンソルの性質より特徴づけられるフィンスラー空間の例をあげよう．

(4.3) を (4.1) に代入すると，

$$\omega^k \wedge \left(\frac{1}{2}R^i_{kjl}\omega^j \wedge \omega^l + P^i_{kj\alpha}\omega^j \wedge \omega^\alpha_m\right) = 0 \tag{4.5}$$

が得られる．添字 k, j, l の巡回置換をとると，二つの同様な式がさらに得られる．これらの二つを (4.5) に加えると

$$\frac{1}{2}\left(R^i_{kjl} + R^i_{jlk} + R^i_{lkj}\right)\omega^k \wedge \omega^j \wedge \omega^l + 3P^i_{kj\alpha}\omega^k \wedge \omega^j \wedge \omega^\alpha_m = 0 \tag{4.6}$$

となる．(4.6) の各項の係数が 0 であるので，**ビアンキの恒等式**

$$R^i_{kjl} + R^i_{jlk} + R^i_{lkj} = 0 \tag{4.7}$$

が成立する．これは，式的にリーマン多様体の場合と同じ (第 5 章の (1.57) を参照) であり，P は次式のように対称，すなわち，

$$P^i_{kj\alpha} = P^i_{jk\alpha} \tag{4.8}$$

である．

なお，概計量的性質 (3.36) を外微分すれば，曲率テンソル R と P の新たな性質が得られる．(4.2) と条件 $\omega^m_m = 0$ を用いると，曲率テンソルの次の基本的な恒等式

$$\begin{aligned}\Omega_{ik} + \Omega_{ki} &= \Omega^j_i\delta_{jk} + \Omega^j_k\delta_{ji} \\ &= -2A_{kij}\Omega^j_m - 2(DA)_{ki\alpha} \wedge \omega^\alpha_m\end{aligned} \tag{4.9}$$

が得られる．ここで，§4–2 の議論によると，カルタンテンソルの共変微分 DA は，

$$\begin{aligned}(DA)_{ki\alpha} &= dA_{ki\alpha} - A_{si\alpha}\omega^s_k - A_{ks\alpha}\omega^s_i - A_{kis}\omega^s_\alpha \\ &\equiv \frac{1}{2}\left(L_{ki\alpha\beta}\omega^\beta_m + Q_{ki\alpha s}\omega^s\right)\end{aligned} \tag{4.10}$$

である．最後の等式では，カルタンテンソルの共変微分の垂直部分 L と水平部

分 Q がそれぞれ定義されている．A の完全対称性から，上記の方程式では，添字 k と i を入れ換えても，その左辺は変わらない．よって，

$$L_{ki\alpha\beta} = L_{ik\alpha\beta}, \tag{4.11}$$

および

$$Q_{ki\alpha s} = Q_{ik\alpha s} \tag{4.12}$$

が成り立つ．

さらに，(4.10) において $k = m$ とし，添字 i, j, j のいずれかが m ならば $A_{ijk} = 0$ であるので

$$Q_{mi\alpha s} = 0 \tag{4.13}$$

が得られる．

ここで (4.3) と (4.10) を (4.9) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\delta_{ji}R^j_{kab} + \delta_{jk}R^j_{iab}\right)\omega^a\wedge\omega^b + \left(\delta_{ji}P^j_{ks\alpha} + \delta_{jk}P^j_{is\alpha}\right)\omega^s\wedge\omega^\alpha_m \\ = -2A_{kij}\left(\frac{1}{2}R^j_{mab}\omega^a\wedge\omega^b + P^j_{ms\alpha}\omega^s\wedge\omega^\alpha_m\right) \\ - L_{ki\alpha\beta}\omega^\beta_m\wedge\omega^\alpha_m - Q_{ki\alpha s}\omega^s\wedge\omega^\alpha_m\end{aligned} \tag{4.14}$$

が成り立つ．右辺の $\omega^\beta_m \wedge \omega^\alpha_m$ を含む項は 0 なので，

$$L_{ki\alpha\beta} = L_{ki\beta\alpha} \tag{4.15}$$

である．(4.14) における $\omega^a \wedge \omega^b$ の係数を比較すれば，

$$\begin{aligned}R_{kisl} + R_{iksl} &= R^j_{ksl}\delta_{ji} + R^j_{isl}\delta_{jk} \\ &= -2A_{kij}R^j_{msl}\end{aligned} \tag{4.16}$$

となる．これは，第 5 章の定理 1.4 におけるリーマン多様体の曲率テンソルの性質 1) の一般化である．特に，$k = m$ とおくと，

$$R_{misl} + R_{imsl} = 0 \tag{4.17}$$

が成り立ち，

$$R_{mmsl} = 0 \tag{4.18}$$

が得られる．一方，(4.4) とビアンキの恒等式 (4.7) より

$$R_{kmml} = R_{lmmk} \tag{4.19}$$

が成り立つ．(4.17) を用いると，(4.19) は

$$R_{mkml} = R_{mlmk} \tag{4.20}$$

と同値である．(4.14) の $\omega^s \wedge \omega^\alpha_m$ の係数の比較より，(4.16) と同様に，

$$P_{kis\alpha} + P_{iks\alpha} = -2A_{kij}P^j_{ms\alpha} - Q_{kis\alpha}, \quad P_{kis\alpha} = \delta_{ij}P^j_{ks\alpha} \tag{4.21}$$

が得られる．よって，(4.8) を用いると，

$$\begin{aligned}
&(P_{kis\alpha} + P_{iks\alpha}) - (P_{ski\alpha} + P_{ksi\alpha}) + (P_{isk\alpha} + P_{sik\alpha}) \\
&\quad = 2P_{kis\alpha} \\
&\quad = -2A_{kij}P^j_{ms\alpha} + 2A_{skj}P^j_{mi\alpha} - 2A_{isj}P^j_{mk\alpha} - Q_{ki\alpha s} + Q_{sk\alpha i} - Q_{is\alpha k}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

が成り立つ．$k = s = m$ とおき，(4.12), (4.13) および (3.40) から，

$$P_{mim\alpha} = 0 \tag{4.23}$$

である．ここで (4.22) において $k = m$ とおくと，

$$P_{mis\alpha} = -P_{ims\alpha} = -\frac{1}{2}Q_{is\alpha m} \tag{4.24}$$

となり，したがって，

$$A_{ijk}P^j_{ms\alpha} = A_{ijk}\delta^{jl}P_{mls\alpha} = \frac{1}{2}A^j_{ik}Q_{js\alpha m} \tag{4.25}$$

が成り立つ．なお，(4.25) と (4.12) を (4.22) の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned}
P_{kis\alpha} = \frac{1}{2}\left(A^j_{ik}Q_{js\alpha m} - A^j_{ks}Q_{ji\alpha m} + A^j_{si}Q_{jk\alpha m}\right) \\
- \frac{1}{2}\left(Q_{ik\alpha s} - Q_{ks\alpha i} + Q_{si\alpha k}\right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

が得られる．したがって，第 2 チャーン曲率テンソル P はカルタンテンソル A とその共変微分の水平部分 Q でかくことができる．さらに，P の対称性は (4.8), (4.21) および (4.24) で示される．なお，式 (4.21), (4.26) から次のことがわかる．

補題 1　第 2 チャーン曲率テンソル $P^j_{ik\alpha}$ が 0 となるための必要十分条件は，カルタンテンソルの共変微分の水平部分 $Q_{ki\alpha s}$ が 0 となることである．

次に，第 1 チャーン曲率テンソル R を自然座標で表そう．§8–3.3 の表 1, (3.61), (3.64) を用いると，(4.3) は

$$\begin{aligned}\Omega_k^i &= d\theta_k^i - \theta_k^j \wedge \theta_j^i \\ &= \frac{1}{2}R_{kjl}^i du^j \wedge du^l + P_{kjl}^i du^j \wedge \delta X^l \end{aligned} \tag{4.27}$$

と同値であることがわかる．ここで δX^l は (3.56) である．捩率 0 の条件 (3.64) によると，

$$d\theta_k^i = (d\Gamma_{kj}^i) \wedge du^j \tag{4.28}$$

が成り立つ．式

$$\frac{\delta \Gamma_{kj}^i}{\delta u^l} \equiv \left\langle d\Gamma_{kj}^i, \frac{\delta}{\delta u^l} \right\rangle \tag{4.29}$$

を導入し，(4.27) の両辺に $\left(\frac{\delta}{\delta u^j}, \frac{\delta}{\delta u^l}\right)$ を作用させると，

$$R_{kjl}^i = \frac{\delta \Gamma_{kl}^i}{\delta u^j} - \frac{\delta \Gamma_{kj}^i}{\delta u^l} + \Gamma_{kl}^h \Gamma_{hj}^i - \Gamma_{kj}^h \Gamma_{hl}^i \tag{4.30}$$

が得られる．ここで，$\frac{\delta}{\delta u^l}$ は (3.59) で与えられる．この式はリーマン幾何学における同様の式 ($\frac{\delta \Gamma_{kl}^i}{\delta u^j}$ を $\frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^j}$ と入れ換えた第 4 章の式 (2.23)) と比較すると式的に同じである．同様に，(4.27) に $\left(\frac{\delta}{\delta u^j}, \frac{\delta}{\delta X^l}\right)$ を作用させると，

$$P_{kjl}^i = -\frac{\delta \Gamma_{kj}^i}{\delta X^l} = -F\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial X^l} \tag{4.31}$$

が得られる．

したがって，$R_{ijkl} = R_{ikl}^h g_{hj}$ の対称性について次の定理[4)]にまとめられる．これは，フィンスラー幾何学における，第 5 章の定理 1.4 の一般化である．

定理 4.1 フィンスラー多様体の第 1 チャーン曲率テンソル R_{ijkl} (h–h 成分) は，

1) $R_{ijkl} + R_{jikl} = -2A_{ija}R_{bkl}^a \dfrac{X^b}{F} \equiv 2B_{ijkl}$,
2) $R_{ijkl} + R_{kjli} + R_{ljik} = 0$ (ビアンキの恒等式),
3) $R_{ijkl} - R_{klij} = (B_{ijkl} - B_{klij}) + (B_{iljk} + B_{jkil}) + (B_{ljki} + B_{kilj})$,
4) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

をみたす．ここで，1) における A_{ija} は自然基底におけるカルタンテンソルで

4) 定理 4.1 の 3) は Bao, Chern, Shen 2000 によって初めて与えられた．

ある．

証明　1) は，(2.14) を用いると (4.16) より直接得られる．2) と 4) は (4.7) と (4.4) によりそれぞれ得られる．また，ビアンキの恒等式 2) の添字 $(ijkl)$ の巡回置換によって，同様の三つの式をつくり 2) と加えると，3) が証明できる．さらに，1) と 3) より 4) が容易に得られる．　□

§8-4.2　旗曲率とリッチ曲率

リーマン多様体の場合 (第 5 章の (3.6), (3.7) を参照) と同様に，

$$R(X,Y)Z = R^j_{ikl} Z^i X^k Y^l \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{4.32}$$

によって与えられる曲率作用素

$$R(X,Y):\ \Gamma(p^*TM) \to \Gamma(p^*TM),$$

および，4 重線形関数

$$R(X,Y,Z,W) \equiv G\,(R(Z,W)X,Y) \tag{4.33}$$

を定義しよう．ここで $X,Y,Z,W \in p^*TM$ である．リーマン多様体の場合と異なり，g_{ij} は PTM 上の関数であり，評価されているベクトルに依存している．定理 4.1 における R_{ijkl} の対称性に対応する $R(X,Y,Z,W)$ の対称性について

1)
$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W) &= -2A\,(X,Y,R(Z,W)e_m) \\ &\equiv 2B(XYZW), \end{aligned} \tag{4.34}$$

2)
$$R(X,Y,Z,W) + R(Z,Y,W,X) + R(W,Y,X,Z) = 0, \tag{4.35}$$

3)
$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) - R(Z,W,X,Y) = {}& [B(XYZW) - B(ZWXY)] \\ &+ [B(XWYZ) + B(YZXW)] \\ &+ [B(WYZX) + B(ZXWY)]\,, \end{aligned} \tag{4.36}$$

4)
$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) \tag{4.37}$$

が成り立つ．これは，§5–3 におけるリーマン曲率関数の性質 1)–3) の一般化である．

ここで，リーマン多様体 M の断面曲率は，任意の点 $p \in M$ と任意の二つの1次独立な接ベクトル $X, Y \in T_pM$ に対して

$$K(X,Y) = \frac{-R(X,Y,X,Y)}{G(X,X)G(Y,Y) - (G(X,Y))^2}$$

で定義される (§5–3 を参照)．これはベクトル X と X の始点からでるベクトル Y の p における "旗" に関しての量であると考えられる．このとき，$K(X,Y)$ は旗を含む T_pM の2次元平面のみに依存し，旗の棒やその始点からでるベクトルの選び方によらない．

フィンスラー幾何学において，**旗曲率**とよばれるリーマン幾何学の断面曲率の一般化

$$K(e_m, Y) \equiv \frac{-R(e_m, Y, e_m, Y)}{G(e_m, e_m)G(Y,Y) - (G(e_m, Y))^2} \tag{4.38}$$

を定義しよう．各 $p \in PTM$ における旗の棒をつねに $e_m = \frac{X^i}{F}\frac{\partial}{\partial u^i}$ と選び，その始点からでるベクトルを e_m と1次独立である任意のベクトルとする．$G(e_m, e_m) = 1$ であるが，意味を明らかにするため，上記の方程式の分母に残しておくことにする．旗曲率は $(u^i, X^i) \in PTM$ と $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in (p^*TM)_{(u,X)}$ の関数である．また，それは Y の倍数によらないことがわかる．

旗曲率に関係する基本的な量は，PTM 上の**リッチ曲率** Ric_p $(p \in PTM)$ である．p^*TM 上の任意の正規直交標構場 $\{e_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ に対して，Ric_p は旗曲率 $K(e_m, e_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, m-1)$ の平均

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_p &\equiv \frac{1}{m-1}\sum_{\alpha=1}^{m-1} K(e_m, e_\alpha) \\ &= -\frac{1}{m-1}\sum_{\alpha=1}^{m-1} R(e_m, e_\alpha, e_m, e_\alpha)\end{aligned} \tag{4.39}$$

である．ここで e_m は (2.14) である．

リーマン幾何学と同様に旗曲率とリッチ曲率は，フィンスラー多様体の大域的な性質に関する重要な情報が含まれている．§8–8 ではいくつかの例を述べる．

§8-4.3 特殊フィンスラー空間

i) リーマン空間

歴史的に，リーマン空間はフィンスラー空間のもっとも重要な例であり，す

でに §8–3.2 で述べた．フィンスラー多様体 (M,F) は，そのフィンスラー計量 g_{ij} が u^i のみの関数ならば**リーマン多様体**といわれる．Chern の定理 3.2 によると，M はリーマン多様体であるための必要十分条件は，カルタンテンソル A が 0 となることである．

ii) ベアバルド空間

フィンスラー多様体 (M,F) は，第 2 チャーン (h–v) 曲率テンソル P が $P=0$ ならば，**ベアバルド空間**という．このとき補題 1 と (4.31) より次の補題が成り立つ．

補題 2　(M,F) をフィンスラー多様体とする．このとき次の性質は同値である．

1) M はベアバルド空間である．
2) カルタンテンソルの共変微分の水平部分 Q が 0 である．
3) チャーン接続係数 Γ^i_{kj} は X^l に依存しない．

性質 3) と (4.29) より，ベアバルド空間の場合，

$$\frac{\delta\Gamma^i_{kl}}{\delta u^j}=\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial u^j}, \tag{4.40}$$

および，

$$R^i_{kjl}=\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial u^l}+\Gamma^h_{kl}\Gamma^i_{hj}-\Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{hl} \tag{4.41}$$

が成り立つ．

注意．(4.41) はリーマン多様体の場合に対応する式 (第 4 章の (2.23)) と同じにみえる．ただし，チャーン接続係数 Γ^j_{ik} ((3.75), (3.76) によって与えられる) は第 2 クリストッフェル記号 ((3.78) が定義式) と同じではない．

フィンスラー束 $p^*TM \to SM$ 上のベアバルド空間の具体的な例は，Bao, Chern, and Shen 2000 を参照されたい．

iii) 局所ミンコウスキー空間

フィンスラー多様体 (M,F) は第 1 および第 2 チャーン曲率テンソルが 0，すなわち $R=P=0$ のとき，**局所ミンコウスキー**という．

局所ミンコウスキー空間の特徴づけは次で与えられる.

補題 3 フィンスラー多様体 (M, F) が局所ミンコウスキーであるための必要十分条件は，各点 $p \in M$ に対して，F が X^i のみの関数であるような TM 上の局所座標系 (u^i, X^i) が存在することである.

この補題の証明は，一般アファイン接続空間論の次の補題 4 (例えば Spivak 1979 (Vol II) を参照) に基づいている．この証明は省略する.

補題 4 D を有限次元多様体 M 上の捩率 0 の接続としよう．この曲率がある点 $p \in M$ の近傍内で 0 ならば，すべての接続係数 Γ^j_{ik} が 0 であるような点 p における局所座標系 (u^i) が存在する.

補題 3 の証明 $\frac{\partial F}{\partial u^i} = 0$ となるような (u^i, X^i) がつねにあるとしよう．したがって，(2.12) より $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ であり，(3.78) より $\gamma^j_{ik} = 0$ となる．これより，(3.79) によると $N^i_j = 0$ となる．したがって，(3.75), (3.76) を用いると，チャーン接続の係数 Γ^j_{ik} も 0 であることが得られる．したがって，(4.30), (4.31) より $R = P = 0$ である.

逆に $R = P = 0$ としよう．このとき，補題 2 より $\frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial X^l} = 0$ となり，(4.41) を用いて

$$R^i_{kjl} = \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial u^l} + \Gamma^h_{kl}\Gamma^i_{hj} - \Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{hl} = 0 \tag{4.42}$$

が成り立つ．よって，Γ^j_{ik} は M 上の捩率 0 で，曲率 0 の接続係数であることがわかる．ここで補題 4 によると，$\Gamma^j_{ik} = 0$ であるような任意の点 $p \in M$ における局所座標系がある．よって，(3.8) より $N^i_j = 0$ となり，したがって，(3.74) より $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ となる．したがって g_{ij} は u^k に依存しないので，(2.12) より得られる性質

$$X^i X^j g_{ij} = F^2$$

とオイラーの定理 (2.2) より，F も u^k に依存しない. □

注意. 直観的にミンコウスキー空間をつくるには，M 上の各接空間 T_pM に同じミンコウスキーノルムを定義すればよい．ただし，この方法を用いると，多様体の位相的な性質との間に支障がおきる．局所ミンコウスキー多様体上の幾何学と位相との間の関係については Bao, Chern, and Shen 2000 を参照.

例 1. $\mathbb{R}^2$ の有用なミンコウスキーノルムの一つは

$$F(X^1, X^2) = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + \alpha\sqrt{(X^1)^4 + (X^2)^4}}; \qquad \alpha \geq 0$$

で与えられる.

§8-5　弧長の第 1 変分と測地線

前章で導入した旗曲率は，フィンスラー幾何学の変分問題に重要な役割を果たす．このことは，弧長の第 1 と第 2 変分公式よりわかる．本節と次節では，チャーン接続を用いると，これらの式はリーマン幾何学の場合と同じ形をしていることを証明する．ただし，第 2 変分の公式の場合，リーマン幾何学の断面曲率の代わりにフィンスラー幾何学の旗曲率を用いる．

したがって，これらの公式に基づいているリーマン幾何学の多くの古典的な定理はフィンスラー幾何学の場合にも一般化できる．§8–7，§8–8 ではいくつかの重要な例を紹介する．例えば，変分公式 (5.24) および (6.8) は，チャーン接続の構造方程式 (3.3), (3.36) より直接に成り立つことがわかる (定理 3.2 参照).

さて，多様体 M 上の滑らかな曲線の**変分**を定義しよう．

定義 5.1　$c\colon [0,a] \to M$ を M 上の滑らかな曲線とする．このとき，c の変分は，$\sigma(t,0) = c(t)$ $\ (t \in [0,a])$ となるような可微分写像 $\sigma\colon [0,a] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ である．$c(t)$ を変分の**底曲線**という．任意の $u \in (-\epsilon,\epsilon)$ に対して u を固定すると，パラメーター付き曲線 $\sigma_u\colon [0,a] \to M$，$\sigma_u(t) = \sigma(t,u)$ は**変分の曲線** (t–曲線) といい，t が固定のとき，パラメーター付き曲線 $\sigma_t(u) = \sigma(t,u)$ を変分の**横断曲線** (u–曲線) という．

変分 $\sigma(t,u)$ より，M 上の 2 つのベクトル場

$$T \equiv \sigma_* \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tag{5.1}$$

$$U \equiv \sigma_* \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \tag{5.2}$$

が得られる．これらは，t–曲線および u–曲線の速度である．特に，ベクトル場

$$U(t,0) = \left.\frac{\partial \sigma(t,u)}{\partial u}\right|_{u=0}$$

は底曲線 $c(t)$ に沿う変分 σ の**変分場**とよばれる．

フィンスラー多様体の場合，t 曲線の長さは

$$L(u) = \int_0^a F(\sigma(t,u),T)\,dt = \int_0^a \sqrt{G_T(T,T)}\,dt \tag{5.3}$$

である．ここで，F はフィンスラー関数であり，G_T の下付きの T はフィンス

ラー計量 G が**標準リフト**

$$\widetilde{\sigma}(t,u) \equiv (\sigma(t,u), T(t,u)) \in PTM \tag{5.4}$$

において評価されるという意味である．このとき，**弧長の第 1 変分**は

$$L'(u) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G_T(T,T)}\, dt \tag{5.5}$$

である．

PTM 上に次のベクトル場

$$\widetilde{T} \equiv \widetilde{\sigma}_* \frac{\partial}{\partial t}, \tag{5.6}$$

$$\widetilde{U} \equiv \widetilde{\sigma}_* \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.7}$$

を定義し，リフト (5.4) における e_m が T に沿う単位ベクトル

$$e_m = \frac{X^i}{F}\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{T}{\sqrt{G_T(T,T)}} \tag{5.8}$$

となるような正規直交標構場 $e_i = 1,\ldots,m$ を選び，e_i の双対余標構場を ω^i $(i = 1,\ldots,m)$ としよう．ここで，長方形 $[0,a]\times(-\epsilon,\epsilon)$ 上の引き戻し形式

$$\widetilde{\sigma}^*\omega^i = a^i dt + b^i du, \tag{5.9}$$

$$\widetilde{\sigma}^*\omega_i^j = a_i^j dt + b_i^j du \tag{5.10}$$

を用いて計算を行なうと便利で直観的である．ここで，

$$a^i = \omega^i\big(\widetilde{T}\big), \tag{5.11}$$

$$b^i = \omega^i\big(\widetilde{U}\big), \tag{5.12}$$

$$a_i^j = \omega_i^j\big(\widetilde{T}\big), \tag{5.13}$$

および

$$b_i^j = \omega_i^j\big(\widetilde{U}\big) \tag{5.14}$$

である．ω^i は dX^j の項を含まないので，

$$a^i = \omega^i\big(\widetilde{T}\big) = \omega^i(T) = T^i, \tag{5.15}$$

$$b^i = \omega^i\big(\widetilde{U}\big) = \omega^i(U) = U^i \tag{5.16}$$

が成り立つ．

(5.8) における e_m の選択の仕方より

$$a^\alpha = \omega^\alpha(T) = 0, \tag{5.17}$$

$$a^m = \omega^m(T) = \sqrt{G_T(T,T)} \tag{5.18}$$

となり，(5.5) より

$$L'(u) = \int_0^a \frac{\partial a^m}{\partial u}\,dt \tag{5.19}$$

が成り立つ．

上記の被積分関数内の微分を計算するには，$\widetilde{\sigma}^*$ を用いて，チャーン接続の捩率 0 の条件 (式 (3.3))

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$$

を引き戻す．$\widetilde{\sigma}^*$ は外微分および外積と可換 (第 3 章の (2.43), (2.42) を参照) であるので，

$$d(\widetilde{\sigma}^*\omega^i) = \widetilde{\sigma}^*\omega^j \wedge \widetilde{\sigma}^*\omega_j^i \tag{5.20}$$

が得られる．(5.9) より

$$d(\widetilde{\sigma}^*\omega^i) = \left(-\frac{\partial a^i}{\partial u} + \frac{\partial b^i}{\partial t}\right) dt \wedge du \tag{5.21}$$

となり，(5.21), (5.9), (5.10) を (5.20) に代入すると

$$-\frac{\partial a^i}{\partial u} + \frac{\partial b^i}{\partial t} = a^j b_j^i - b^j a_j^i \tag{5.22}$$

が得られる．よって，

$$\omega_m^m = 0$$

(式 (3.4)) なので，(5.13), (5.14) と (5.17) を $i = m$ のとき (5.22) に代入すると，

$$\frac{\partial a^m}{\partial u} = \frac{\partial b^m}{\partial t} + b^\alpha a_\alpha^m \tag{5.23}$$

が成り立つ．

この式を (5.19) に代入すれば，フィンスラー幾何学における第 1 変分公式

$$L'(u) \doteq b^m\Big|_0^a + \int_0^a dt\, b^\alpha a_\alpha^m \tag{5.24}$$

が得られる．

(5.11) と (5.16) を用いると，捩率 0 の条件 (5.22) は

$$D_T U = D_U T \tag{5.25}$$

ともかける．ここでの共変微分は，$p^* TM \to PTM$ 上のチャーン接続によるものである．概計量的条件 (3.36) が

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} G_T(X,Y) &= G_T(D_T X, Y) + G_T(X, D_T Y)\\ &\quad + 2X^i Y^j A_{ij\alpha}\omega_m^\alpha(\widetilde{T})\end{aligned} \tag{5.26}$$

と同値であることを念頭におき，

$$\begin{aligned}D_T\left(\frac{T}{\sqrt{G_T(T,T)}}\right) &= D_T e_m\\ &= -a_k^m \delta^{ki} e_i\end{aligned} \tag{5.27}$$

を用いると，第 1 変分公式 (5.24) は

$$L'(u) = \int_0^a \left[\frac{\partial}{\partial t} G_T\left(U, \frac{T}{\sqrt{G_T(T,T)}}\right) - G_T\left(U, D_T\left(\frac{T}{\sqrt{G_T(T,T)}}\right)\right)\right] dt \tag{5.28}$$

とかける．

また，固定した終点の変分の場合，変分 U は $U(0) = U(a) = 0$ を満足し，(5.28) の境界の項は 0 となる．このことを用いて，フィンスラー多様体の測地線を定義しよう．

定義 5.2 フィンスラー多様体 M における**測地曲線**というのは，固定終点をもつ任意の滑らかな変分 σ に対する弧長汎関数 $L(u)$ (式 (5.3)) の**臨界曲線**である．すなわち，$\sigma(0,u) = c(0)$，$\sigma(a,u) = c(a)$ をみたす任意の σ に対して $L'(0) = 0$ となるような c は測地線である．

(5.28) より，フィンスラー空間の測地線の方程式は

$$D_T\left(\frac{T}{\sqrt{G_T(T,T)}}\right) = 0 \tag{5.29}$$

である．一定速度パラメーター条件を課すと，すなわち $G_T(T,T) =$ 一定 ならば，(5.29) はリーマン幾何学のいわゆる**自平行** (第 4 章の (2.20))

$$D_T T = 0 \tag{5.30}$$

となる．余標構場 ω^i と チャーン接続形式 ω_i^j を用いると，測地線 (式 (5.29)) の条件は次のようになる．フィンスラー空間 M 上の測地線は，その標準リフト $\widetilde{c}(t) = (c(t), T(t)) \in PTM$ が微分形式系

$$a^\alpha = \omega^\alpha(\widetilde{T}) = 0, \qquad a_m^\alpha = \omega_m^\alpha(\widetilde{T}) = 0 \tag{5.31}$$

の解であるような曲線 $c(t)$ である．ここで，$\widetilde{T} \equiv \widetilde{c}_* \frac{d}{dt}$ である ((5.13) と (5.17) を参照).

次に，リーマン多様体の測地線とフィンスラー多様体の測地線との違いを考えよう．リーマン計量に関する §5–2 の性質は，すべてフィンスラー計量の場合でもそのまま成り立つ．ただし，フィンスラー計量の場合，その性質の証明は異なる．本章では，この議論を詳細に載せることはできないが，Bao and Chern 1993，Bao, Chern and Shen 2000 を参照されたい．

以下，一定速度測地線の議論のみに制限する．(5.30) によると，フィンスラー多様体の一定速度測地曲線 $c(t)$ は，常微分方程式

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt}(\Gamma^i_{kl})_{\widetilde{c}} = 0, \tag{5.32}$$

または，同値な

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt}\left\{\frac{g^{ij}}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j}\right)\right\} = 0 \tag{5.33}$$

をみたす．ここで $\widetilde{c}$ は標準リフトであり，Γ^i_{kl} は自然座標系に関するチャーン接続係数である (式 (3.75))．式的にみるとこの方程式は，リーマン多様体の場合と同じである．ここで (5.32) の第 2 項目には，(3.41) より二重縮約をとるので M 項は (式 (3.82)) 入ってこないことに注意しよう．

注意．測地方程式 (5.33) はリーマン多様体の場合と同様であるが，計量テンソル g_{ij} は，u^i および $T^i(t) = \frac{du^i}{dt}$ に依存する．よって，方程式の左辺における第 2 項目の速度 $\frac{du^i}{dt}$ に関する非線形依存は，2 次形式よりもっと複雑である．さらに，アファイン変換 $t \to \alpha t + \beta$ に関して，左辺はスカラー倍になる．すなわち，

$$w^i = u^i(\alpha s + \beta), \qquad \widetilde{w}(s) = \left(w^i(s), \tfrac{dw^i}{ds}\right)$$

に対して，$\widetilde{w}^i(s)$ と $\widetilde{u}^i(t)$ が PTM 上では同一点であり，連鎖律より

$$\frac{d^2w^i}{ds^2} + \frac{dw^k}{ds}\frac{dw^l}{ds}(\Gamma^i_{kl})_{\widetilde{w}} = \alpha^2\left[\frac{d^2u^i}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt}(\Gamma^i_{kl})_{\widetilde{u}}\right]_{t=\alpha s+\beta} \tag{5.34}$$

が成り立つ．しかし，フィンスラー束の底空間が PTM ではなく TM あるいは球束 SM となった場合，上記のことはもう成り立たない．ここで $c(t)=(u^i(t))$ が測地線ならば，(5.34) より，その反転曲線

$$w^i(s)=u^i(a-s), \qquad 0\le s\le a \tag{5.35}$$

も測地線である．このことも，p^*TM の底空間が SM の場合には必ずしも成り立たない．

§5–2 におけるリーマン計量の場合の議論と同様に，2 階微分方程式の理論を (5.33) に用いると，フィンスラー多様体上の測地標準座標および標準座標近傍を導入できる．フィンスラー多様体 M に対して，T_pM における半径 r の**フィンスラー球** $S_p(r)$，すなわち，

$$S_p(r)=\{X\in TM|F(p,X)=r\}, \tag{5.36}$$

および**フィンスラー球体** $B_p(r)$，すなわち，

$$B_p(r)=\{X\in TM|F(p,X)<r\} \tag{5.37}$$

を定義しよう．第 5 章の (2.9) と同様に，十分小さい $B_p(r)$ に対して $0\in T_pM$ を通る放射線を点 p を通る一意の測地線に写す**指数写像**

$$\exp_p : T_pM\to M$$

が定義できる．すなわち，§5–2 の記号では，

$$u^i=(\exp_x X)^i\equiv f^i(1,x^k,X^k) \tag{5.38}$$

となる．

$X\neq 0$ に対して指数写像は滑らかで，$X=0$ において C^1 級である (Bao, Chern and Shen 2000 を参照)．さらに，$(\exp_x)_*$ は $0\in T_xM$ では単位写像である (第 5 章の (2.11) に基づく)．したがって，$\exp_x$ は十分小さい $B_x(r)$ 上の微分同相写像である．

T_xM のフィンスラー球 $S_x(\delta)$ を指数写像で写すことにより，第 5 章の定理 2.5 における中心 $x\in M$ の超球面 Σ_σ の一般化 (**測地球面**)，すなわち，

$$\Sigma_\delta=\exp_x(S_x(\delta)) \tag{5.39}$$

が得られる．また，任意の $X\in S_x(\delta)$ に対して，中心 x，半径 $\le\delta$ の測地球面を交差する**放射測地線** $\sigma(t)=\exp_x(tX)$ $(0\le t\le 1)$ が得られる．すると，第 5 章の定理 2.3 の系と同様に次が成り立つ．

補題 1 (ガウスの補題)　速度 $T(t)$ の放射測地線 $\sigma(t)$ は内積 G_T に関して測地球面に垂直である．

証明　$X \in S_x(\delta)$ と $\tau \in [0,1]$ に対して，放射測地線

$$\sigma(t) = \exp_x(t\tau X), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{5.40}$$

を考えよう．ここで $\tau X \in S_x(\tau\delta)$ である．$Y(0) = \tau X$ をみたす $S_x(\tau\delta)$ 上の任意の曲線 $Y(u)$ に対して，

$$\sigma(t,u) = \exp_x(tY(u)) \tag{5.41}$$

を放射測地線 $\sigma(t)$ に関する変分 $\sigma:\ [0,1] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ としよう．$u=0$ における $Y(u)$ の速度を V とおくと，$\sigma(t,u)$ の変分場 $U(t,0)$ は

$$U(0,0) = 0, \qquad U(1,0) = \exp_{x*} V$$

を満足し，後者は測地球面 $\exp_x(S_x(\tau\delta))$ の接ベクトルである．変分 (5.41) の各 t 曲線は始点 x，一定速度 $\tau\delta$ の測地線であるので，その長さはすべて等しく，弧長の第 1 変分 $L'(0)$ は 0 である．ここで $\exp_x(tX)$ の速度場を T とすると，$\sigma(t) = \exp_x(t\tau X)$ の速度は τT である．よって，(5.29) および弧長の第 1 変分公式 (5.28) より

$$G_T(\exp_{x*} V, \tau T) = 0 \tag{5.42}$$

となり，したがって，補題が成り立つ．　□

ガウスの補題を用いて，第 5 章の定理 2.4 の 2) をフィンスラー幾何学の場合に一般化できる．

定理 5.1　フィンスラー多様体の測地線は局所的に最短曲線である．

この定理を証明するには，フィンスラー関数に関する次の基礎的な補題が必要である．この結果は Rund 1959 によるが，それに関する広い議論が Bao, Chern and Shen 2000 にある．

補題 2　任意の (u,X), $(u,V) \in PTM$ に対して，

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X^i}\right)_{(u,X)} V^i \le F(u,V) \tag{5.43}$$

が成り立つ．

証明　フィンスラー計量の正定値性より，$u \in M$ で，任意の $X, V, W \in T_uM$ に対して

$$G_{(u,X)}(V,W) \le \sqrt{G_{(u,X)}(V,V)G_{(u,X)}(W,W)} \tag{5.44}$$

が成り立つ．等号は，V が W に比例する場合に限り成り立つ．(5.44) は**コーシー–シュワルツの不等式**とよばれる．フィンスラー計量に関して (2.12) およびオイラーの定理を用いると，

$$g_{ij}(u,X)V^iV^j = F(u,X)V^iV^j\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j} + V^iV^j\frac{\partial F}{\partial X^i}\frac{\partial F}{\partial X^j}, \tag{5.45}$$

$$X^i g_{ij}(u,X) = F(u,X) = \frac{\partial F}{\partial X^j}, \tag{5.46}$$

および

$$X^iX^j g_{ij}(u,X) = F^2 \tag{5.47}$$

が成り立つ．なお，$\frac{\partial F}{\partial X^i}$ に (5.46) を適用し，コーシー–シュワルツの不等式において $W = X$ とし，さらに (5.47) を用いると，(5.45) の右辺の第 2 項目は

$$V^iV^j\frac{\partial F}{\partial X^i}\frac{\partial F}{\partial X^j} \leq g_{ij}(u,X)V^iV^j \tag{5.48}$$

をみたすことがわかる．よって，(5.45) より

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^i \partial X^j}V^iV^j \geq 0 \tag{5.49}$$

が得られる．等号は，V と X が比例しているときに成り立つ．ここで $F(u,V)$ を

$$\begin{aligned} F(u,V) = F(u,X) &+ (V^i - X^i)\frac{\partial F(u,X)}{\partial X^i} \\ &+ (V^i - X^i)(V^j - X^j)\frac{\partial^2 F(u, X + \epsilon(V-X))}{\partial X^i \partial X^j}, \quad 0 < \epsilon < 1 \end{aligned} \tag{5.50}$$

と展開すると，(5.49) より，各 $V \in T_uM$ に対して，

$$F(u,X) + (V^i - X^i)\frac{\partial F(u,X)}{\partial X^i} \leq F(u,V) \tag{5.51}$$

が成り立つ．上記の不等式の左辺の第 2 項目にオイラーの定理を用いると，本補題が成り立つ． □

これらを用いて定理 5.1 を証明しよう．

証明 (定理 5.1 の証明) ここでは，Bao and Chern 1993 によって初めて与えられた証明に従って解説する．任意の $p \in M$ に対して，指数写像 $(t,X) \mapsto \exp_p(tX)$ $(0 \leq t \leq \delta,\ X \in T_pM,\ F(p,X) = 1)$ が微分同相であるような十分小さい $\delta > 0$ を選ぼう．この写像は単位ベクトル X を放射測地線に写し，$t = \delta$ のとき，フィンスラー球 $S_p(1)$ を測地球面 $\exp_p(S(\delta))$ に写す．単位ベクトル $Y \in T_pM$ に対応する長さ δ の放射測地線 $\exp_p(tY)$ $(0 \leq t \leq \delta)$ を考えよう．この測地線の始点は $p \in M$ であり，終点は $q \in \exp_p(S(\delta))$ である．点 p と q を結ぶ曲線

$$c(u) = \exp_p(t(u)X(u)) \tag{5.52}$$

を考えよう．ここで，$0 \le u \le 1$, $F(p, X(u)) = 1$, $X(0) = X(1) = Y$, $t(0) = 0$, $t(1) = \delta$ である．したがって，$c(u)$ の長さは少なくとも δ であることを証明すればよい．

各 u に対して，曲線 $c(u)$ は，測地標準座標 $(t(u)X^i(u))$ をもつ 点 p の放射測地線と交わる．したがって，

$$c(u) = \sigma(t(u), u) \tag{5.53}$$

である．ここで，$\sigma(t, u)$ は

$$\sigma(t, u) = \exp_p(tX(u)), \qquad 0 \le t \le \delta,\ 0 \le u \le 1 \tag{5.54}$$

で定義される $\exp_p(tY)$ の変分である．その t 曲線のすべては長さ δ の単位速度放射測地線となる．よって，連鎖律より，

$$\frac{dc}{du} = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{dt}{du} + \frac{\partial\sigma}{\partial u} = T\frac{dt}{du} + U \tag{5.55}$$

が成り立つ．したがって，曲線 $c(u)$ の長さは

$$L(c(u)) = \int_0^1 du F\left(c(u), \frac{dc}{du}\right) \tag{5.56}$$

であるので，$V = \frac{dc}{du}$，$X = T$ に対して，補題 2 より

$$\begin{aligned} L(c(u)) &\ge \int_0^1 du \left[\left(\frac{\partial F}{\partial X^i}\right)_{(c,T)} T^i \frac{dt}{du} + \left(\frac{\partial F}{\partial X^i}\right)_{(c,T)} U^i\right] \\ &= \int_0^1 du \left(\frac{dt}{du} + \frac{1}{F}(g_{ij})_{(c,T)} U^i T^j\right) \end{aligned} \tag{5.57}$$

が成り立つ．ここで等号は，オイラーの定理の $\left(\frac{\partial F}{\partial X^i}\right)_{(c,T)} T^i = 1$，$T$ は単位ベクトルすなわち $F(c(u), T) = 1$ であることと，(2.12) より得られる $\frac{\partial F}{\partial X^i} = \frac{X^j}{F} g_{ij}$ により成り立つ．一方，ガウスの補題より

$$(g_{ij})_{(c,T)} U^i T^j = 0 \tag{5.58}$$

であり，したがって，

$$L(c(u)) \ge t(1) - t(0) = \delta \tag{5.59}$$

が成り立つ．　□

注意．リーマン計量の場合における定理 5.1 の証明 (第 5 章の定理 2.4 に示されている) は，フィンスラー計量の場合には成り立たない．なぜならば，リーマン幾何学では，曲線 $c(u)$ に沿って速度ベクトルの長さを計算するのに用いられる計量は $c(u)$ の速度によらない．これに対して，フィンスラー幾何学の場合，計量は $c(u)$ および $\frac{dc}{du}$ の両方に依存するからである (詳細は Bao and Chern 1993 を参照)．

§8-6 弧長の第2変分とヤコビ場

簡単のため，ふたたび変分長方形の引き戻し微分形式を用いる．(5.19) より，弧長の第 2 変分は

$$L''(u) = \int_0^a \frac{\partial^2 a^m}{\partial u^2}\,dt \tag{6.1}$$

である．(5.23) を u で微分すると，

$$\frac{\partial^2 a^m}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 b^m}{\partial u \partial t} + a_\alpha^m \frac{\partial b^\alpha}{\partial u} + b^\alpha \frac{\partial a_\alpha^m}{\partial u} \tag{6.2}$$

となる．チャーン接続係数 a_α^m の微分を計算するには，チャーン曲率テンソルの構造方程式 (4.2), (4.3) を $\widetilde{\sigma}^*$ で引き戻す．よって，(5.9), (5.10), (5.17), (5.18) およびチャーン曲率テンソル (4.4) の対称性 (4.4) を用いると，

$$\frac{\partial b_k^i}{\partial t} - \frac{\partial a_k^i}{\partial u} = a_k^j b_j^i - b_k^j a_j^i + R^i_{kml} a^m b^l + P^i_{km\beta} a^m b_m^\beta - P^i_{kj\beta} b^j a_m^\beta \tag{6.3}$$

が得られる．この式で $i = m$，$k = \alpha$ とすると，P を含むはじめの項は $P^m_{\alpha m\beta}$ となり，これは (4.26), (4.12), (4.13), (3.35) より 0 である．したがって，

$$\frac{\partial a_\alpha^m}{\partial u} = \frac{\partial b_\alpha^m}{\partial t} - a_\alpha^j b_j^m + b_\alpha^j a_j^m - R^m_{\alpha ml} a^m b^l + P^m_{\alpha j\beta} b^j a_m^\beta \tag{6.4}$$

が成り立つ．

この式を (6.2) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 a^m}{\partial u^2} = {} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial b^m}{\partial u} + b^\alpha b_\alpha^m\right) - b_\alpha^m \frac{\partial b^\alpha}{\partial t} - b^\alpha a_\alpha^\beta b_\beta^m \\ & - a^m b^\alpha b^l R^m_{\alpha ml} \\ & + a_\alpha^m \left(\frac{\partial b^\alpha}{\partial u} + b^\beta b_\beta^\alpha - b^\beta b^j P^{m\alpha}_{\beta j}\right)\end{aligned} \tag{6.5}$$

となる．ここで，

$$P^{m\alpha}_{\beta j} = \delta^{\alpha\gamma} P^m_{\beta j\gamma}$$

である．(5.22) で $i = \alpha$ とすると，(5.17) より $a^\alpha = 0$ なので，

$$\frac{\partial b^\alpha}{\partial t} = a^m b_m^\alpha - b^j a_j^\alpha \tag{6.6}$$

が得られる．この式を用いて，(6.5) は，

$$\frac{\partial^2 a^m}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial b^m}{\partial u} + b^\alpha b^m_\alpha\right)$$
$$+ a^m_\alpha\left(\frac{\partial b^\alpha}{\partial u} + b^\beta b^\alpha_\beta - b^\beta b^j P^{m\alpha}_{\beta j} - \delta^{\alpha\beta} b^m b^m_\beta\right)$$
$$- a^m(b^\alpha_m b^m_\alpha + b^\alpha b^l R^m_{\alpha ml}) \tag{6.7}$$

とかける．なお，チャーン曲率テンソルの対称性 (4.7) を用いると，R を含む上記の項は

$$-a^m b^\alpha b^l R^m_{\alpha ml} = -a^m b^\alpha b^l R_{\alpha iml}\delta^{im}$$
$$= a^m b^\alpha b^l R_{i\alpha ml}\delta^{im}$$
$$= a^m b^\alpha b^l R_{m\alpha ml}$$
$$= a^m b^i b^j R_{mimj}$$

とかける．最後の等式は (4.18) より成り立つ．さらに，(3.4), (3.9) より

$$-a^m b^\alpha_m b^m_\alpha = a^m b^\alpha_m \delta_{\alpha\beta} b^\beta_m$$
$$= a^m \delta_{ij} b^i_m b^j_m$$

が成り立つ．

なお，(6.1) において $u = 0$ の場合に制限し，底曲線は測地線であるとしよう．このとき，(5.31) および (3.9) より，(6.7) の a^m_α に比較する項は 0 となる．したがって，フィンスラー幾何学における弧長の第 2 変分公式は

$$L''(0) = \left(\frac{\partial b^m}{\partial u} - \delta_{ij} b^j b^j_m\right)\Bigg|_0^a$$
$$+ \int_0^a a^m(\delta_{ij} b^i_m b^j_m + R_{mimj} b^i b^j)\,dt \tag{6.8}$$

である．

ところで，第 1 チャーン曲率テンソル R_{mimj} を含む項は，旗曲率に比例することがわかる．すなわち，第 5 章の (3.6) より，曲率作用素 $R(T,U)$ の T 上の作用は

$$R(T,U)T = R^j_{ikl} T^k U^l T^i e_j$$
$$= (F(T))^2 R^j_{mml} U^l e_j \tag{6.9}$$

であるので,

$$G_T(R(T,U)T,U) = g_{ij}F^2R^j_{mml}U^iU^l$$
$$= F^2R_{mimj}U^iU^j \tag{6.10}$$

が成り立つ. ここで, 旗曲率 $K(e_m,U)$ の定義 (4.38) より

$$a^mR_{mimj}b^ib^j = -FK(e_m,U)\big[G_T(U,U)G_T(e_m,e_m) - \{G_T(e_m,U)\}^2\big]$$
$$= -a^mK(e_m,U)\big[\delta_{ij}b^ib^j - (b^m)^2\big] \tag{6.11}$$

となる. なお, 第2チャーン曲率テンソル P を含む (6.7) の項は, (6.8) にはないことに注意しよう. この理由から, フィンスラー幾何学における弧長の第2変分公式は, リーマン幾何学の同様な式とまったく同じとなる. そこではリーマン多様体の断面曲率の代わりにフィンスラー多様体の旗曲率が用いられている.

チャーン接続の構造方程式 ((5.25) と (5.26)) を用いると, 第2変分公式 (6.8) は

$$L''(0) = G_T\left(D_UU, \frac{T}{F(T)}\right)\bigg|_0^a + \int_0^a \frac{1}{F(T)}[G_T(D_TU,D_TU) + G_T(R(T,U)T,U)]dt - \int_0^a \frac{1}{F(T)}\left(\frac{\partial F(T)}{\partial u}\right)^2 dt \tag{6.12}$$

ともかける. 読者はこのことを証明せよ.

さて, 接ベクトル T をもつ測地線に沿う二つの滑らかなベクトル場 V と W に対して, **指数形式**を

$$I(V,W) \equiv \int_0^a \frac{1}{F(T)}[G_T(D_TV,D_TW) + G_T(R(T,V)T,W)]\,dt \tag{6.13}$$

で定義する. したがって, 第2変分形式は

$$L''(0) = I(U,U) + G_T\left(D_UU, \frac{T}{F(T)}\right)\bigg|_0^a - \int_0^a \frac{1}{F(T)}\left(\frac{\partial F(T)}{\partial u}\right)^2 dt \tag{6.14}$$

となる. さらに, T に対して U の G_T 直交成分

$$U_\perp \equiv U - G_T\left(U, \frac{T}{F(T)}\right)\frac{T}{F(T)} \tag{6.15}$$

を考えると，構造方程式 (5.26)，および測地条件 (5.29) より

$$G_T(D_T U_\perp, D_T U_\perp) = G_T(D_T U, D_T U) - \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 \tag{6.16}$$

である．一方，旗曲率の性質より

$$G_T(R(T, U_\perp)T, U_\perp) = G_T(R(T, U)T, U) \tag{6.17}$$

が得られる．(6.16), (6.17) を (6.13) に代入すると，第 2 変分公式は

$$L''(0) = I(U_\perp, U_\perp) + G_T\left(D_U U, \frac{T}{F(T)}\right)\Big|_0^a \tag{6.18}$$

とかける．

(6.13) によって定義されている指数形式をふたたび考えよう．一定速度測地線 ($F(T) =$ 一定) の場合，部分積分法，構造方程式 (5.26) および測地条件 (5.31) を用いると，$I(J, V)$ は

$$I(J, V) = \frac{1}{F} G_T(D_T J, V)\Big|_0^a - \frac{1}{F}\int_0^a dt G_T(D_T D_T J + R(J, T)T, V) \tag{6.19}$$

とかける．なお，式

$$D_T D_T J + R(J, T)T = 0 \tag{6.20}$$

をみたす測地線に沿うベクトル場 $J(t)$ は**ヤコビ場**とよばれる．上記の方程式は**ヤコビ方程式**とよばれ，外見的にはリーマン幾何学の**ヤコビ方程式**と同じである．2 階常微分方程式の理論より，速度場 T をもつ測地線 $\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq a)$ および任意の $V, W \in T_{\sigma(0)}M$ に対して，$J(0) = V$，$D_T J(0) = W$ をみたす σ に沿うヤコビ場 $J(t)$ が一意に存在することがわかる．したがって，次の定理が得られる．

定理 6.1 すべての t 曲線がフィンスラー多様体の測地線である任意の滑らかな変分 (必ずしも固定の始点終点ともつとは限らない) に対して，その変分場 U はヤコビ場である．逆に，測地線 $\sigma(t)$ に沿うヤコビ場 $J(t)$ は σ の変分場 U を決定する．

証明 一定速度測地線 ($D_T T = 0$) に対してチャーン接続の捩率 0 の条件 $D_T U = D_U T$ (式 (5.25)) に D_T を作用させると，(5.25), (5.26) および (6.3) より

$$\begin{aligned} D_T D_T U &= D_T D_U T = (D_T D_U - D_U D_T)T \\ &= -(F(T))^2 (R^i_{mjm} U^j - P^i_{mm\alpha} \omega^\alpha_m (\widetilde{U})) e_i \\ &= (F(T))^2 R^i_{mmj} U^j e_i \\ &= R(T, U)T \\ &= -R(U, T)T \end{aligned} \tag{6.21}$$

が成り立つ．ここで，等式の第 3 式に (4.23) を用いて P の項を消去し，第 4 式に (6.9) を用い，最後の式に R の対称性質 (4.4) を用いた．

速度ベクトル $T(t)$ をもつ測地線 $\sigma(t)$ $(0 \le t \le a)$ に沿って与えられたヤコビ場 $J(t)$ に対して，$\sigma(t)$ の変分 $\sigma(t, u)$ を次のように構成できる．まず，$\gamma(0) = \sigma(0)$ を満足し，$V(u=0) = J(t=0)$ をみたす速度ベクトル $V(u)$ をもつ曲線 $\gamma(u)$ を選ぼう．そして初期条件 $Y(0) = T(0)$，$W(0) = (D_T J)|_{t=0}$ をみたす $\gamma(u)$ に沿って平行なベクトル場 $Y(u)$ と $W(u)$ をとろう．このとき，求められた変分は

$$\sigma(t, u) = \exp_{\gamma(u)} \{t(Y(u) + uW(u))\} \tag{6.22}$$

である．ここで $\sigma(0, u) = \gamma(u)$ であり，$\sigma(t, 0)$ は測地線 $\sigma(t)$ であることに注目しよう．測地線 $\sigma(t)$ の変分場 $U(t) = \left.\dfrac{\partial \sigma(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0}$ をとると，定理の前半より，$U(t)$ はヤコビ場であることがわかる．$U(0) = J(0)$ および $(D_T U)|_{t=0} = (D_T J)|_{t=0}$ が成り立つ場合，与えられた初期条件に対するヤコビ場の一意性より，$U(t)$ と $J(t)$ は一致することがわかる．これは実際

$$U(0) = \left.\frac{\partial \sigma(0, u)}{\partial u}\right|_{u=0} = \frac{d}{du}\gamma(u) = V(0) = J(0), \tag{6.23}$$

および

$$\begin{aligned} (D_T U)\big|_{t=0} &= (D_U T)\big|_{t=0} \\ &= D_U \frac{\partial}{\partial t} \exp_{\gamma(u)} \{t(Y(u) + uW(u))\}\Big|_{t=0, u=0} \end{aligned} \tag{6.24}$$

により成立する．ここで，(6.24) の一番目の式に捩率 0 の条件を用いた．$T_{\gamma(u)}M$ の原点における $\exp_{\gamma(u)*}$ は単位ベクトルなので，

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp_{\gamma(u)} \{t(Y(u) + uW(u))\}\Big|_{t=0} = Y(u) + uW(u) \tag{6.25}$$

となり，すなわち

$$\begin{aligned} (D_T U)\big|_{t=0} &= D_U (Y(u) + uW(u))\big|_{t=0, u=0} \\ &= D_{U(0)} (Y(u) + uW(u))\big|_{u=0} \end{aligned}$$

$$= D_{V(0)}(Y(u) + uW(u))\big|_{u=0}$$

$$= W(0) = (D_T J)\big|_{t=0} \tag{6.26}$$

が成り立つ．よって，定理の逆が成り立つ． □

リーマン幾何学と同様にヤコビ場は，フィンスラー空間の測地線の性質を記述するのに重要な道具である．特に，旗曲率と測地線との間の関係をみるためには，点におけるヤコビ場の振舞いによって特徴づけられる**共役点**の考え (次の定義 6.1 参照) を用いて研究される．

チャーン接続の性質のおかげで，フィンスラー幾何学における解析法はリーマン幾何学で用いる方法と同様である．本節の最後に，共役点とヤコビ場の間の関係を表す指数形式の重要な性質のいくつかを明らかにしよう (これらはリーマン幾何学においても基本的な性質である)．紙面の都合により，ここでリーマン幾何学と類似のすべての証明を載せることができないが，読者は，リーマン幾何学の場合は Spivak, Vol.III 1975, do Carmo 1993，そしてフィンスラー幾何学の場合は Bao, Chern and Shen 2000 を参照されたい．

定義 6.1　$V \in T_pM$ における指数写像の微分写像 $\exp_{p*}$ は非退化であると仮定する．すなわち，$\exp_{p*} W = 0 \in T_{\exp_p V}M$ となるような 0 でない $W \in T_V(T_pM)$ が存在すると仮定すると，このとき，測地線 $\sigma(t) = \exp_p tV$ $(0 \leq t \leq 1)$ 上の点 $\sigma(1) = \exp_p V$ は点 $\sigma(0) = p$ の**共役**であるという．

上記の定義における測地線 $\sigma(t)$ の変分

$$\sigma(t, u) = \exp_p(t(V + uW)) \tag{6.27}$$

を考えよう．この変分の各 t 曲線はヤコビ場であり，(6.27) より $U(0) = U(1) = (\exp_p)_* W = 0$ となる．

したがって次が成り立つ．

補題 1　測地線 $\sigma(t) = \exp_p tV$ $(0 \leq t \leq 1)$ 上の点 $\sigma(1)$ が $\sigma(0)$ と共役点である，すなわち，$\exp_{p*}$ が $V \in T_{\sigma(0)}M$ における非退化であるための必要十分条件は，$J(0) = J(1) = 0$ である測地線 $\sigma(t)$ に沿って 0 ではないヤコビ場 $J(t)$ が存在することである．

両端点固定の変分の場合，すなわち $U(0) = U(1) = 0$ の場合，これら両端点における $D_U U$ も 0 である．よって，(6.14) より $I(U,U) < 0$ ならば $L''(0) < 0$ が導かれる．したがって次が成り立つ．

補題 2 測地線 $\sigma(t)$ における両端点固定の変分場 $U(t)$ に対して，$I(U,U) < 0$ ならば，その測地線は最短測地線ではない．

測地線上の共役点と両端点で 0 になる変分場の指数形式の符号との関係に関する重要な性質を以下に述べる．本節の残りでは，$W(0) = W(a) = 0$ をみたす点 p と q を結ぶ測地線 $\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq a)$ に沿うすべての滑らかなベクトル場 $W(t)$ を $\mathcal{V}_0$ で表すことにする．このとき次が成り立つ．

補題 3 (1) 測地線 $\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq a)$ に沿う点 $\sigma(0)$ の共役点がない場合，任意の $W(t) \in \mathcal{V}_0$ に対して

$$I(W,W) \geq 0$$

であり，$W(t) = 0$ の場合に等号が成り立つ．

(2) $\sigma(a)$ が $\sigma(0)$ と共役点であり，ただし任意の $0 < \tau < a$ に対して，$\sigma(\tau)$ は $\sigma(0)$ と共役点でないと仮定する．このとき，任意の $W(t) \in \mathcal{V}_0$ に対して，

$$I(W,W) \geq 0$$

であり，等号は W がヤコビ場の場合に成り立つ．

補題 4 測地線 $\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq a)$ に対して点 $\sigma(b)$ $(0 < b < a)$ が $\sigma(0)$ と共役点であるための必要十分条件は，$I(W,W) < 0$ であるような T に G_T 直交する $W \in \mathcal{V}_0$ が存在することである．

上記の二つの補題の証明は Bao and Chern 1993 に載っている．補題 3 の系として次が成り立つ．

補題 5 $\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq a)$ は共役点を含まない測地線としよう．$W(0) = J(0)$, $W(a) = J(a)$ をみたす σ に沿う滑らかなベクトル場 W, J があり，さらに，J はヤコビ場であるとしよう．このとき，

$$I(W,W) \geq I(J,J)$$

であり，等号が成立するための必要十分条件は $W = J$ である．

証明　仮定より $J-W\in\mathcal{V}_0$ なので，補題 3 より

$$\begin{aligned}0&\le I(J-W,J-W)\\&=I(J,J)-2I(J,W)+I(W,W)\\&=\frac{1}{F}G_T(D_TJ,J)\Big|_0^a-\frac{2}{F}G_T(D_TJ,W)\Big|_0^a+I(W,W)\\&=-\frac{1}{F}G_T(D_TJ,J)\Big|_0^a+I(W,W)\\&=-I(J,J)+I(W,W)\end{aligned}$$

である．ここで，1 番目の不等式に，指数形式の二重線形性およびその対称性を用い，2 番目に (6.19) を用いた．さらに，補題 3 を用いると，等号が成り立つための必要十分条件は $J-W=0$ であることがわかる．　□

補題 6　任意の $W\in\mathcal{V}_0$ に対して $I(V,W)=0$ であるための必要十分条件は，V がヤコビ場であることである．

証明　V はヤコビ場ならば，(6.19) より，任意の $W\in\mathcal{V}_0$ に対して $I(V,W)=0$ が成り立つ．

逆に，任意の $W\in\mathcal{V}_0$ に対して $I(V,W)=0$ と仮定しよう．さらに，$f(t)$ を $f(0)=f(a)=0$ および $0<t<a$ に対して $f(t)>0$ をみたす $[0,a]$ 上の滑らかな関数としよう．

$$W=f(t)\{D_TD_TV+R(V,T)T\}$$

とすると，$I(V,W)$ に関する式 (6.19) より

$$0=-\frac{1}{F}\int_0^a dtf(t)G_T(D_TD_TV+R(V,T)T,D_TD_TV+R(V,T)T)$$

が得られ，したがって，V がヤコビ場であることがわかる．　□

§8-7　完備性およびホップ–リノウの定理

あるフィンスラー多様体が他のフィンスラー多様体の開部分多様体になるかという問題は，その大域的な性質の中の一つである．この性質に関連する重要な概念は，計量空間の完備性である．したがって，完備フィンスラー空間を調べるために，まず計量空間の幾何学を紹介しよう．その性質は，明らかにリーマン幾何学のときにも成り立つものである．

定義 7.1　計量空間 M における閉区間 $0 \leq t \leq 1$ の連続な像を M 上の**弧**という．M における半開区間 $0 \leq t < 1$ の連続な像を M 上の**道**という．

$p(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ を M 上の弧としよう．任意の $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq 1$ と計量空間 M の距離関数 ρ に対して

$$\rho(p(t_1), p(t_2)) + \rho(p(t_2), p(t_3)) = \rho(p(t_1), p(t_3)) \tag{7.1}$$

が成り立てば，$p(t)$ を M 上の**線分**という．両端点 p, q をもつ M 上の線分を pq で表す．

すべての閉区間 (あるいは半開区間) は互いに位相同形なので，上記の定義による任意の区間の長さは 1 とは限らない．弧 (あるいは道) の領域の閉部分における制限は**部分弧**という．

M 上の道 $p(t)$ $(0 \leq t < 1)$ が

1) $p(t)$ が M の閉部分集合であり，

2) $p(t)$ のすべての部分弧が線分である，

をみたすとき，$p(t)$ を M 上の**放射線**という．関数 $\rho(p(0), p(t))$ $(0 \leq t < 1)$ が有界ならば，その上限を放射線の長さという．

例 1.　M を平面 $\mathbb{R}^2$ より一点を除いた空間，すなわち $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ としよう．このとき，M は $\mathbb{R}^2$ より誘導される距離関数に関して計量空間である．ここで，

$$p_1(t) = (t-1, 0), \qquad 0 \leq t < 1$$

とおくと，$p_1(t)$ は有限の長さをもつ M 上の放射線であり，その長さは，実際，1 である．しかし，放射線

$$p_2(t) = \left(1, \frac{1}{1-t}\right), \quad 0 \leq t < 1$$

の長さは有界ではない．

例 2.　任意の計量空間が放射線をもつとは限らない．例えば，コンパクトな計量空間は放射線をもたない．すなわち，$p(t)$ $(0 \leq t < 1)$ をコンパクトな計量空間 M の放射線とすると，極限 $\lim_{t \to 1} p(t) = p_0 \in M$ が存在する．任意の放射線は M の閉部分集合なので，p_0 は放射線上にあることになり，すなわち，$p(t_0) = p_0$ となるような t_0 $(0 \leq t_0 < 1)$ がある．$t_1 = \frac{t_0+1}{2}$ とおくと

$t_0 < t_1 < 1$ である．$t_1 < t < 1$ に対して，放射線の定義より

$$\rho(p(t_0), p(t_1)) + \rho(p(t_1), p(t)) = \rho(p(t_0), p(t))$$

であり，結局

$$\rho(p(t_0), p(t)) \geq \rho(p(t_0), p(t_1)) > 0$$

が成り立つ．ただし $t \to 1$ のとき左辺は 0 に近づき，矛盾が生じる．したがって，M は放射線をもたない．

これより，$\mathbb{R}^2$ の単位円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ はコンパクトな計量空間なので，放射線をもたない．

補題 1　$a_1, \ldots, a_n$ を条件

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) = \rho(a_1, a_n) \tag{7.2}$$

をみたす M の点列としょう．このとき，任意の整数列 $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ に対して

$$\sum_{r=1}^{k-1} \rho(a_{i_r}, a_{i_{r+1}}) = \rho(a_{i_1}, a_{i_k}) \tag{7.3}$$

が成り立つ．

証明　補題が成り立たないとしよう．すると

$$\sum_{r=1}^{k-1} \rho(a_{i_r}, a_{i_{r+1}}) > \rho(a_{i_1}, a_{i_k})$$

が成り立つような整数列 $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ がある．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) &\geq \rho(a_1, a_{i_1}) + \sum_{r=1}^{k-1} \rho(a_{i_r}, a_{i_{r+1}}) + \rho(a_{i_k}, a_n) \\ &> \rho(a_1, a_{i_1}) + \rho(a_{i_1}, a_{i_k}) + \rho(a_{i_k}, a_n) \\ &\geq \rho(a_1, a_n)\end{aligned}$$

となり，これは (7.2) と矛盾するので，(7.3) は成立する．　□

補題 2　$a_k a_{k+1}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は計量空間 M 上の線分であり，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \rho(a_k, a_{k+1}) = \rho(a_1, a_n) \tag{7.4}$$

が成り立つとしよう．このとき，$\gamma = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}$ は線分である．

証明　$n = 3$ としよう．明らかに $a_1a_2 + a_2a_3$ は弧なので，これは線分であることを示そう．x, y, z をこの弧上の 3 点とし，y は x と z の間に位置しているとしよう．点 x と z の両点が a_1a_2，あるいは a_2a_3 に属しているとき，線分の定義より

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$$

が成り立つ．次に，$x, y \in a_1a_2$，$z \in a_2a_3$ と仮定しよう．すると，

$$\rho(a_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, a_2) = \rho(a_1, a_2),$$
$$\rho(a_2, z) + \rho(z, a_3) = \rho(a_2, a_3)$$

となり，(7.4) より

$$\begin{aligned}\rho(a_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, a_2) + \rho(a_2, z) + \rho(z, a_3) &= \rho(a_1, a_2) + \rho(a_2, a_3) \\ &= \rho(a_1, a_3)\end{aligned}$$

が成り立つ．補題 1 より，

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$$

となり，したがって $a_1a_2 + a_2a_3$ は線分である．

帰納法を用いて，本補題を任意の n の場合にも成り立つことが同様に証明できる．

□

補題 3　$\beta : p(t)$ $(0 \leq t < 1)$ は M 上の道であり，その任意の部分弧は線分であるとしよう．このとき β が M の閉部分集合ならば β は放射線であり，β が M の閉部分集合でない場合，$\lim_{t \to 1} p(t) = p$ が存在し，かつ $\beta + p$ は線分である．

証明　最初の主張は放射線の定義より成り立つ．ここで β が M の閉部分集合ではないとしよう．すると，$p \notin \beta$ となる β の極限点 p と，$a_\nu = p(t_\nu) \to p$ $(\nu \to +\infty)$ をみたす数列 $t_\nu \to 1$ $(0 \leq t_\nu < 1)$ がある．この場合 $\lim_{t \to 1} p(t) = p$ を示そう．

いま，$\{t_\nu\}$ は単調増加数列と仮定すると，$p(t_\nu) \to p$ $(\nu \to +\infty)$ であるので，任意の正数 ϵ に対して，$\nu > N$ のとき

$$\rho(p(t_\nu), p) < \frac{\epsilon}{4} \tag{7.5}$$

が成り立つような正の整数 N がある．よって，$\nu, \nu' > N$ に対して，つねに

$$\rho(p(t_\nu), p(t_{\nu'})) \leq \rho(p(t_\nu), p) + \rho(p(t_{\nu'}), p) < \frac{\epsilon}{2} \tag{7.6}$$

が成り立つ．

$\delta = 1 - t_{N+1} > 0$ とすると，$0 < 1 - t < \delta$ に対して $t_{N+1} < t < 1$ となる．$t_\nu \to 1$ なので，上記の任意の t に対して，$t_{N+1} < t < t_{\nu'} < 1$ をみたす添字 $\nu' > N$ がつねにある．β の任意の部分弧は線分なので，

$$\begin{aligned}\rho(p(t_{N+1}), p(t)) &\leq \rho(p(t_{N+1}), p(t)) + \rho(p(t), p(t_{\nu'})) \\ &= \rho(p(t_{N+1}), p(t_{\nu'})) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{7.7}$$

が成り立つ．したがって，$0 < 1 - t < \delta$ に対して，

$$\rho(p(t), p) \leq \rho(p(t), p(t_{N+1})) + \rho(p(t_{N+1}), p) < \epsilon$$

となり，すなわち

$$\lim_{t \to 1} p(t) = p$$

が成り立つ．

ここで $p(1) = p$ としよう．このとき，$p(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ は M 上の線分であることを示そう．x, y, z を弧上の 3 点とし，y は x と z の間にあるとしよう．このとき，$z \neq p(1)$ ならば，仮定より

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$$

である．次に，$z = p(1)$ ならば $y \neq p(1)$ と仮定してもかまわない．$a_\nu = p(t_\nu) \to p$ なので，y は x と a_ν の間にあることになる．ここで ν は十分大きいとする．xa_ν は線分なので，

$$\rho(x, y) + \rho(y, a_\nu) = \rho(x, a_\nu)$$

となり，$\nu \to +\infty$ のとき

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$$

である．したがって，$\beta + p$ は線分であることがわかる．　□

今後，M を連結フィンスラー多様体としよう．フィンスラー関数 F の斉次性より，M はフィンスラー計量に誘導される距離関数 (第 5 章の (2.47) を参照) に関して計量空間である．弧長がその両端点の距離と等しい曲線分は，定義 7.1 における線分であることが次の補題で示される．

補題 4　γ を，点 p, q を結び，可測弧長 $\rho(p, q)$ をもつ M 上の曲線としよう．このとき，γ はフィンスラー多様体 M の測地線であり，計量空間 M の線分でもある．逆に，γ が p と q を結ぶ M 上の線分ならば，γ は測地線であり，γ 上の 2 点間の距離は，その 2 点間の γ 上の弧長に等しい．

2 点を結ぶ測地線 γ の長さが，その点の間の距離に等しければ，γ を**最短測地線**という．フィンスラー多様体では，最短測地線と線分の二つの概念は同値であるということが上記の補題の真髄である．

証明 (補題 4 の証明) r を曲線 γ 上の一点としよう．第 5 章の定理 2.4 の仮定をみたす r の標準座標近傍 U をとろう．そして，r と r_1 との間の γ の部分が U に含まれているような点 $r_1 \in \gamma \cap U$ を選ぼう．この部分を γ_1 とおく．このとき，定理 5.1 より，点 p, q を結ぶ U に含まれている点 r, r_1 を結ぶ最短線分である測地線 g が一意に存在する．$g \neq \gamma$ ならば，γ の長さは g の長さより必ず大きいが，このことは γ の長さが p と q との間の距離に等しいということに矛盾している．したがって，γ は測地線である．

y が x と z の間に位置するような任意の 3 点 $x, y, z \in \gamma$ を選ぼう．このとき

$$\widehat{px} + \widehat{xy} + \widehat{yz} + \widehat{zq} = \widehat{pq} = \rho(p,q)$$

である．ここで，$\widehat{pq}$ は p と q を結ぶ曲線の弧長を表す．フィンスラー多様体における 2 点間の距離の定義より

$$\rho(p,q) \leq \rho(p,x) + \rho(x,y) + \rho(y,z) + \rho(z,q) \leq \widehat{px} + \widehat{xy} + \widehat{yz} + \widehat{zq} = \rho(p,q)$$

となり，よって等号が必ず成り立つ．補題 1 より

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = \rho(x,z)$$

であるので，γ は線分となる．

逆に，γ を p, q を結ぶ線分としよう．

$$\rho(r_i, r_{i+1}) = \frac{1}{n}\rho(p,q)$$

をみたす γ の分割 $p = r_0, r_1, \ldots, r_n = q$ を選ぶと

$$\gamma\text{の長さ} = \sum_{i=0}^{n-1} r_i r_{i+1}$$

となる．n が十分大きいとき，弧長 $\widehat{r_i r_{i+1}}$ と $\rho(r_i, r_{i+1})$ との間の差は小さくなって，$\frac{1}{n}$ より高次の無限小となる．よって，

$$\gamma\text{の長さ} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\rho(r_i, r_{i+1}) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \rho(p,q) + o(1)$$

となり，すなわち γ の長さ $= \rho(p,q)$ が成り立つ．したがって，γ は測地線である．□

補題 5 M における任意の点 p に対して，次をみたす正数 $\rho(p)$ が存在する．任意の点 $q \in M$ に対して，

1) $\rho(p,q) \leq \rho(p)$ ならば，p と q を結ぶ線分がある，

2) $\rho(p,q) > \rho(p)$ ならば，$\rho(p,x) = \rho(p)$，および $\rho(p,x) + \rho(x,q) = \rho(p,q)$

をみたす点 $x \in M$ がある．

証明 第 5 章の定理 2.5 の仮定をみたす中心が p で半径 ϵ をもつ測地球 W を選ぼう．$\rho(p) < \epsilon$ をみたす正数 $\rho(p)$ を選べば十分である．$\rho(p,q) < \rho(p)$ ならば $q \in W$ であり，すなわち長さ $\rho(p,q)$ の W に含まれる点 p, q を結ぶ測地線 (第 5 章の定理 2.6 の証明を参照) がある．補題 4 より，この測地線はちょうど線分 pq であり，したがって，1) が成り立つ．

次に，$\rho(p,q) > \rho(p)$ のような $q \in M$ をとろう．距離の定義より，$\nu \to \infty$ のとき $\{\beta_\nu\}$ の長さ s_ν が $\rho(p,q)$ に限りなく近づくような長さの有限な弧の点列 $\{\beta_\nu\}$ が存在する．各 β_ν に $\rho(p,x_\nu) = \rho(p)$ をみたすような点 x_ν を選ぼう．このとき，x_ν は中心 p と半径 $\rho(p)$ をもつ測地球 $\Sigma_{\rho(p)}$ 上にある．$\Sigma_{\rho(p)}$ はコンパクトなので，$\Sigma_{\rho(p)}$ に収束する $\{x_\nu\}$ の部分点列がある．ここで $\{x_\nu\}$ は収束列であると仮定すると

$$\rho(x_\nu, q) \leq \big(x_\nu q \leq s_\nu - \rho(p, x_\nu) = s_\nu - \rho(p)$$

が成り立つので，

$$\rho(p,q) \leq \rho(p,x_\nu) + \rho(x_\nu, q) \leq s_\nu$$

となる．ここで，$\nu \to \infty$ とすると，$s_\nu \to \rho(p,q)$ となる．したがって，

$$\rho(p,q) = \rho(p,x) + \rho(x,q)$$

が成り立つ． □

定理 7.1 M を連結フィンスラー多様体とし，p, q を M 上の 2 点とする．このとき，次の性質のどちらかが成り立つ．

1) p と q を結ぶ線分がある．

2) 任意の点 $x \in \gamma$ に対して，条件

$$\rho(p,x) + \rho(x,q) = \rho(p,q)$$

が成り立つような始点 p をもつ放射線 γ がある．

証明 p と q を結ぶ線分がないと仮定しよう．$a_1 = p$ とおくと，任意の整数 k に対して

$$\rho(a_1, a_2) + \cdots + \rho(a_{k-1}, a_k) + \rho(a_k, q) = \rho(p,q) \qquad (\mathrm{C}_k)$$

が成り立つような線分列 $a_i a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を構成しよう．条件 (C_k) が成り立つような線分 $a_1 a_2, \ldots, a_{k-1} a_k$ がすでに存在すれば，補題 1 より

$$\rho(a_1, a_2) + \cdots + \rho(a_{k-1}, a_k) = \rho(a_1, a_k), \qquad (7.8)$$

$$\rho(a_1, a_k) + \rho(a_k, q) = \rho(a_1, q) \qquad (7.9)$$

が成り立つ．このとき補題 2 より，$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}$ は線分 $a_1 a_k$ であるので，仮定より a_k と q は線分で結ぶことができない．ここで点集合

$S_k = \{x \in M |\ x$ と a_k を一本の線分で結べて，かつ $\rho(a_k, x) + \rho(x, q) = \rho(a_k, q)\}$

を考えよう．補題 5 より，$S_k \neq \varnothing$ および

$$T_{k+1} = \sup_{x \in S_k} \rho(a_k, x) > 0 \tag{7.10}$$

が成り立つ．明らかに，$T_{k+1} \leq \rho(a_k, q)$ であり，さらに

$$\rho(a_k, a_{k+1}) \geq \frac{1}{2} T_{k+1} \tag{7.11}$$

をみたすような点 $a_{k+1} \in S_k$ に対して，線分 $a_1 a_2, \ldots, a_k a_{k+1}$ は条件 (C_{k+1}) を満足する．ここで

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} a_i a_{i+1} \tag{7.12}$$

とおくと γ は道である．また，γ の任意の部分弧がある線分 $\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}$ (k は十分大きいとき) の部分弧となっているので，線分である．補題 3 に基づいて，$\{a_k\}$ は極限点をもっていなければ γ は放射線となる．

このためには，$\lim_{k \to \infty} a_k = r \in M$ としよう．よって，補題 3 により，$\gamma + r$ は線分である．(7.9) では，$k \to \infty$ とすると，

$$\rho(a_1, r) + \rho(r, q) = \rho(a_1, q) \tag{7.13}$$

が成り立ち，同様に，

$$\rho(a_k, r) + \rho(r, q) = \rho(a_k, q) \tag{7.14}$$

が成り立つ．仮定より a_1 と q を結ぶ線分がない．ここで $r \neq q$ なので，補題 5 より，x と r を結ぶ線分があり，

$$\rho(r, x) + \rho(x, q) = \rho(r, q) \tag{7.15}$$

が成り立つような点 $x \neq r$ が存在することがわかる．(7.14) および (7.15) より

$$\rho(a_k, r) + \rho(r, x) + \rho(x, q) = \rho(a_k, q)$$

が成り立ち，補題 1 より

$$\rho(a_k, r) + \rho(r, x) = \rho(a_k, x)$$

である．したがって，補題 2 より $a_k r + r x$ は線分であり，よって，

$$T_{k+1} \geq \rho(a_k, x) \geq \rho(r, x) > 0 \tag{7.16}$$

が成り立つ．この式は任意の $k \geq 1$ に対して成立する．一方，(7.11) より，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} T_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho(a_k, a_{k+1}) \leq \rho(a_1, q)$$

であるので，$\lim_{k\to\infty} T_{k+1} = 0$ となり，(7.16) と矛盾する．したがって，点列 $\{a_k\}$ は極限点をもつことが不可能となり，したがって γ は放射線であることがわかる．

次に，γ 上の任意の点 x をとろう．k が十分大きいとき，x は線分 $\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}$ 上にあるので，

$$\rho(a_1, x) + \rho(x, a_k) = \rho(a_1, a_k)$$

である．この式と (7.9) より

$$\rho(a_1, x) + \rho(x, a_k) + \rho(a_k, q) = \rho(a_1, q)$$

となる．補題 1 より

$$\rho(a_1, x) + \rho(x, q) = \rho(a_1, q) \tag{7.17}$$

であり，したがって本定理が成り立つ．　□

注意．性質 2) の場合

$$\rho(p, x) \leq \rho(p, q), \qquad x \in \gamma$$

であるので，γ の長さは有限である．したがって，ある連結なフィンスラー多様体に有限の長さをもつ放射線が存在しない場合，任意の 2 点を結ぶ線分がある．例 2 より，コンパクトで，連結なフィンスラー多様体の任意の 2 点を一本の線分で結べることがわかる．

定義 7.2　$\{a_n\}$ を計量空間 M 内の点列としよう．任意の与えられた正数 ϵ，任意の $n, l > N(\epsilon)$ に対して

$$\rho(a_n, a_l) < \epsilon$$

をみたすような正の整数 $N(\epsilon)$ が存在すれば，$\{a_n\}$ を**コーシー列**という．

定義 7.3　計量空間 M の各コーシー列が収束する場合，M は**完備**であるという．連結なフィンスラー多様体 M は，フィンスラー計量に誘導される距離関数に関して完備計量空間ならば，M を**完備フィンスラー多様体**という．

収束列のコーシー判定法より，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ は自然な完備計量空間であり，完備リーマン (あるいはフィンスラー) 多様体とみなすことができる．しかし，$\mathbb{R}^m$ はコンパクトではないので，幾何学的な考慮に関しては，コンパク

ト性が適切な条件ではないことがわかる．その代わりに，フィンスラー多様体の大域的な性質を研究するのに，完備性はもっとも条件に適したものである．

定理 7.2 (Hopf-Rinow) M を連結なフィンスラー多様体としよう．このとき，次の条件は同値である．

1) M は完備である．
2) M の任意の測地線は無限に延長できる．
3) M の閉有界部分多様体はコンパクトである．

証明 1) $\Longrightarrow$ 2) M に，延長できない測地線で，かつ始点 $p \in M$ をもつ有限の長さ L の測地線 γ が存在すると仮定しよう．すると，この曲線は $p(t)$ $(0 \leq t < 1)$ と表すことができ，$\lim_{t\to 1} p(t)$ が存在しないことがわかる．なぜならば，$\lim_{t\to 1} p(t)$ が存在するならば，$p(1) = q$ とおくと測地線分 $(0 \leq t \leq 1)$ が得られるが，一方，任意の測地線分は，つねにその終点より延長できるので，仮定と矛盾が生じるからである．ここで $k \to \infty$ のとき，$t_k \to 1$ のような任意の単調増加数列 t_k $(0 \leq t_k < 1)$ をとろう．$a_k = p(t_{k-1})$ $(k = 1, 2, \dots)$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(a_k, a_{k+1}) \leq L \tag{7.18}$$

が成り立つ．よって，与えられた $\epsilon > 0$ に対して，

$$\sum_{k=l}^{n-1} \rho(a_k, a_{k+1}) < \epsilon$$

が成り立つような正の整数 N が存在する．ここで，$n > l > N$ である．したがって，

$$\rho(a_l, a_n) < \epsilon \tag{7.19}$$

が成り立ち，すなわち $\{a_k\}$ はコーシー列となる．一方，M は完備なので，$\lim_{k\to\infty} a_k = q$ のような点 $q \in M$ が必ず存在する．明らかに，q は数列 $\{t_k\}$ のとり方によらない．よって，$\lim_{t\to 1} p(t) = q$ であり，これは矛盾である．したがって，任意の測地線が無限に延長できる．

2) $\Longrightarrow$ 3) M の任意の測地線を無限に延長できると仮定しよう．この場合，M には有限の長さの放射線がない．定理 7.1 より，M の任意の 2 点を一本の線分で結ぶことができる．S を M の有界無限部分集合としよう．このとき，S が中心 a と半径 K の開測地球に含まれるような点 $a \in M$ と正数 K が存在する．ここで $\{x_k\}$ を S 内の異なる無限点列としよう．$\rho(a, x_k) < K$ なので，$\{\rho(a, x_k)\}$ は収束部分数列をもつ有界無限数列である．この数列自身は収束することを仮定し，

$$\lim_{k\to\infty} \rho(a, x_k) = l \leq K$$

としよう．a と x_k を線分 ax_k で結び，ν_k を点 a における ax_k の接ベクトルとしよう．このとき，ν_k は T_aM に含まれる原点を中心にもつ単位フィンスラー球上にある．単位球のコンパクト性より，$\{\nu_k\}$ は単位球上にある一点 ν に収束する．接ベクトル ν に沿って始点 a をもつ測地線 γ をつくろう．γ は無限に延長できるので，a と x_0 との間の γ の部分の長さが l であるような γ 上の点 x_0 が存在する．よって，線分 ax_k は，始点 a をもち，ν_k に接し，長さ $\rho(a, x_k)$ をもつことがわかる．測地線の初期条件への依存性より，$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ となり，したがって x_0 は S 極限点となる．S は閉集合なので，$x_0 \in S$ である．したがって，M の任意の閉有界無限部分集合 S は，その部分集合に属する極限点をもち，すなわち S はコンパクトである．

3) $\Longrightarrow$ 1)　$\{a_n\}$ が M のコーシー点列ならば，$\{a_n\}$ は有界集合である．条件 3) より，この点の集合の閉包はコンパクトであるので，収束点列 $\{a_{n_k}\} \to a_0$ $(k \to \infty)$ がある．

$$|\rho(a_n, a_0) - \rho(a_m, a_0)| \leq \rho(a_n, a_m)$$

なので，$\{\rho(a_n, a_0)\}$ はコーシー列であり，したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, a_0) = \lim_{k\to\infty} \rho(a_{n_k}, a_0) = 0$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ となる．　□

注意 1. 上記の定理の条件 2) は次の条件と同値である．任意の点 $p \in M$ に対して $\exp_p$ は T_pM の全体に定義される．

注意 2. 前にも述べたように，M 上の反転測地線は，フィンスラー束 $p^*TM \to SM$ における測地線であるとは限らない．したがって，上記の定理を SM に応用するとき，無限延長性を前方無限延長といい替える必要がある．このような測地線の微妙な性質については Bao, Chern, and Shen 2000 を参照されたい．

系 1　完備フィンスラー多様体では，任意の 2 点を最短測地線で結ぶことができる．

証明　完備のフィンスラー多様体における測地線を無限に延長できるので，有限の長さの放射線が存在しない．定理 7.1 より，任意の 2 点は一本の線分，すなわち最短測地線で結ぶことができる．　□

系 2　コンパクトで，連結なフィンスラー多様体は完備である．

証明　コンパクトな計量空間の任意の無限部分集合は極限点をもつので，ホップ–リノウの定理より，コンパクトで連結なフィンスラー多様体は完備である．　□

定義 7.4 M を連結なフィンスラー多様体としよう．M が他の連結なフィンスラー多様体の開真部分多様体ではない場合，M は**延長不可**であるという．

定理 7.3 完備フィンスラー多様体は延長不可である．

証明 M を完備フィンスラー多様体としよう．M は他の連結なフィンスラー多様体 M' の開真部分多様体ならば，境界点 $p \in (M' - M) \cap \overline{M}$ が選べる．補題 3 によると，U の任意の点を点 p と M' に含まれている線分で結ぶことができるような M' における点 p の ϵ 球近傍 U がある．一方，$p \in \overline{M}$ であるので，線分 qp の M に含まれる部分が，始点 q をもつ 長さ $\leq \rho(p, q)$ の放射線であるような点 $q \in M \cap U$ が存在する．このことは M の完備性と矛盾するので，M は延長不可である． □

完備性の制限は延長不可性より強い．例えば，$E^2 - \{0\}$ の普遍被覆多様体 Π は連結なリーマン多様体である．これは延長不可であるが，完備ではない．

このことをみるには，Π にリーマン計量が

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

でかける座標系 (ρ, θ) $(0 < \rho < +\infty, -\infty < \theta < \infty)$ を考えよう．ここで $\pi : \Pi \to E^2 - \{0\}$ を

$$\pi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

をみたすような被覆写像としよう．リーマン多様体 Π は，延長不可ならば点 $\rho = 0$ を加えることができる．ただし，得られる多様体は 2 次元リーマン多様体ではない．2 点

$$(\rho_1, \theta_1) = (1, 0), \qquad (\rho_2, \theta_2) = (1, \pi)$$

との間の Π における距離は 2 であるが，Π にこれらの点を結ぶ線分はないので，Π は完備ではないことがわかる．

§8-8 ボンネーマイヤースおよびシングの定理

リーマン幾何学における古典的な定理であるこれらは，弧長の第 2 変分の大域的な応用であり，曲率と位相との間の密接な関係を見事に示している．チャーン接続を用いると，これらはフィンスラー幾何学でも成り立っていることがわかる．

T を T_pM の任意のベクトルで，$e_m = \frac{T}{F(T)}$ を T における単位ベクトルとし，$\{e_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ を G_T 正規直交基底としよう．p における e_m の方向のリッチ曲率は，§8–4.2 の (4.39) で定義されている．このとき，次が成り立つ．

定理 8.1 (Bonnet-Myers)　M を完備連結なフィンスラー多様体としよう．T_pM の任意の方向における点 $p \in M$ でのリッチ曲率は，正の下限

$$\mathrm{Ric}_p \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

をもつとき，

a) M は直径 $\leq \pi r$ をもち，コンパクトで，

b) 基本群 $\pi_1(M)$ は有限である．

この定理を証明するまえに，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた半径 r の誘導計量をもつ S^2 に応用しよう．任意の計量空間の直径は

$$M \text{ の直径} \equiv \sup\{\rho(p,q);\ p, q \in M\} \tag{8.1}$$

で定義される．ここで ρ は距離関数である．半径 r の S^2 に対して，リッチ曲率は $\mathrm{Ric}_p = \frac{1}{r^2}$ であり，直径は πr である．明らかに，S^2 は単連結で完備である．さらに，その基本群は $\pi_1(S^2) = 1$ であり，すなわち有限である．

この例を用いて，定理 8.1 の証明に必要な興味深い事実を示そう．すなわち，もし，$a > \pi r,\ r > 0$ ならば，

$$\int_0^a \left\{ \left(\frac{df}{dt} \right)^2 - \frac{f^2}{r^2} \right\} dt < 0 \tag{8.2}$$

と $f(0) = f(a) = 0$ をみたす滑らかな関数 $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ が存在する．なぜならば，半径 r の S^2 に長さ a $(a > \pi r)$ の単位速度測地線 $\sigma(t)$ を考えよう．さらに，$e_2 = T$ のような σ に沿って正規直交で平行な標構場 e_1, e_2 をとろう．よって，この測地線は $\sigma(0)$ の共役点，すなわち $\sigma(\pi r)$ をもつ．したがって，§8-6 の補題 4 によると，e_2 と直交し，$W(0) = W(a) = 0$ と $I(W, W) < 0$ をみたすような $W(t)$ が存在する．$W(t) = f(t)e_1$ とかくと $f(0) = f(a) = 0$ となり，条件 $I(W, W) < 0$ と，(6.15) と，$F = 1$ と e_1 が σ に沿って平行な標構場であることから，

$$I(W, W) = \int_0^a \left\{ \left(\frac{df}{dt} \right)^2 - \frac{f^2}{r^2} \right\} dt < 0 \tag{8.3}$$

が成り立つ.

さて，定理 8.1 を証明しよう.

証明 (定理 8.1 の証明) a) p, q を M 上の任意の 2 点としよう．ホップ–リノウの定理 7.2 の系 1 より，p と q を結ぶ最短測地線がある．これを単位速度測地線と仮定し，$\gamma\colon [0,a] \to M$, $\gamma(0)=p$, $\gamma(a)=q$ と表す．よって $\rho(p,q)=L(\gamma)=a$ である．$a \leq \pi r$ を証明したい．背理法を用いる．$a > \pi r$ と仮定しよう．すると上記の議論より，(8.2) をみたす滑らかな関数 $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, $f(0)=f(a)=0$ がある．$\gamma(t)$ に沿って $e_m = T$ である G_T 正規直交標構場 e_i $(i=1\dots,m)$ をとろう．チャーン接続の概計量的条件より，このような標構場は存在することが保証されている ((3.46) 以下の議論を参照)．$W_\alpha(t)=f(t)e_\alpha$ $(\alpha=1,\dots,m-1)$ とすると，$W_\alpha(0)=W_\alpha(a)=0$ となる．よって，(6.15), (4.39) により，

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} I(W_\alpha, W_\alpha) = (m-1)\int_0^a dt\left\{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 - f^2\mathrm{Ric}(e_m)\right\} \tag{8.4}$$

が成り立つ．仮定より，$\mathrm{Ric}(e_m) \geq \frac{1}{r^2}$ なので，

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} I(W_\alpha, W_\alpha) \leq (m-1)\int_0^a dt\left\{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 - \frac{f^2}{r^2}\right\} < 0 \tag{8.5}$$

である．最後の不等式は (8.2) より得られる．すると，$I(W_\alpha, W_\alpha) < 0$ が成り立つような特殊な α が存在する．つくり方から，この W_α は，$e_m = T$ と G_T 正規直交で，$W_\alpha(0)=W_\alpha(a)=0$ をみたすものである．よって，両端点固定の測地線 γ の変分場である．ここで (6.18) より

$$L''(0) = I(W_\alpha, W_\alpha) < 0$$

が得られる．よって，γ は p と q を含む極小測地線ではありえない．このことは矛盾であり，$a \leq \pi r$ が成り立つ．点 p と q は任意なので，直径 $M \leq \pi r$ となる．M は閉集合で，仮定より完備である．上記より M は有界集合でもあることが示された．したがって，ホップ–リノウの定理 (定理 7.2) より M はコンパクトであることがわかる．

b) $\widetilde{M}$ は被覆射影 $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ と $\widetilde{M}$ 上の引き戻しフィンスラー構造 $\widetilde{F}=\pi^*F$ をもつ M の普遍被覆空間としよう．射影 π は**局所等長写像**であるので，$\widetilde{M}$ も M と同じく定理の仮定をみたしている．よって，$\pi\colon \widetilde{M} \to M$ は有限被覆である．さらに，M は連結なので，異なる基点 p におけるその基本群 $\pi_1(M,p)$ は同形である．したがって，$\widetilde{M}$ は単連結なので，$\pi_1(M,p)$ と離散有限集合 $\pi^{-1}(p)$ との間に全単射写像があり，すなわち $\pi_1(M)$ は有限である. □

定理 8.2 (Synge) M がコンパクト偶数次元向き付け可能で，正の旗曲率をもつフィンスラー多様体ならば，M は単連結である.

この定理を証明するには，次の補題が必要である．

補題 1　コンパクト，連結なフィンスラー多様体 M では，ループの任意の自由ホモトピー類が最短閉測地線をもつ．

証明　$\pi_1(M) \neq 1$ と仮定しよう．定理 8.1 の b) の証明と同様に，被覆射影 $\pi : \widetilde{M} \to M$ と $\widetilde{M}$ 上の引き戻しフィンスラー構造 $\widetilde{F} = \pi^* F$ をもつ M の普偏被覆空間 $\widetilde{M}$ を導入しよう．このとき π は局所等長写像である．M はコンパクトなので，定理 7.2 の系 2 より完備でもある．よって $\widetilde{M}$ も完備となる．$\pi^{-1}(p) = \{\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3, \dots\}$ とおくと，任意の点 $p \in M$ に対して，

$$\rho(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_n) = \inf_{k \geq 2} \rho(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_k) \equiv \lambda > 0$$

をみたすような $\widetilde{p}_1$ と $\widetilde{p}_n$ $(n \neq 1)$ を結ぶ $\widetilde{M}$ 上の最短測地線 $\widetilde{\gamma}$ を探そう．このような測地線は π により M の上の最短閉測地線に写される．ここで，$\{\widetilde{p}_{n_i}\}$ を $\rho(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_{n_i}) \to \lambda$ が成り立つような $\pi^{-1}(p)$ における点列としよう．この点列は明らかに有界であり，ホップ–リノウの定理 (定理 7.2) の 2) $\Longrightarrow$ 3) の証明により，$\widetilde{M}$ が完備なので $\{\widetilde{p}_{n_i}\}$ が極限点 $\widetilde{p}$ をもつ．π の連結性より $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ であり，よってある $n \geq 2$ に関して $\widetilde{p} = \widetilde{p}_n$ および $\rho(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_n) = \lambda$ が成り立つ．したがって，このようにして求めた曲線 $\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{p}_1$ と $\widetilde{p}_n$ を結ぶ最短測地線である．　□

では，シングの定理の証明に入ろう．

証明 (定理 8.2 の証明)　自明ではない，すなわち 0 にホモトープではない $\alpha \in \pi_1(M)$ があると仮定しよう．すると，上記の補題より α は最短閉測地線を含む．これを単位速度とし，$\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq L)$ と表すこととしよう．ここで，$L > 0$ はその長さである．始点 $\sigma(0) = p$ をもち，σ を 1 周するチャーン接続に関する平行移動を $P : T_pM \to T_pM$ とする．よって，チャーン接続の概計量的性質より，P は G_T 長さと G_T 角を保存するので，これは，向き保存の同形写像である．T_pM における T の G_T 直交補空間をとると，仮定より M は偶数次元なので，$\mathcal{W}$ は奇数次元空間である．$\mathcal{W}$ への P の制限を $Q : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ とおくと，Q は向きを保存し，$\mathcal{W}$ 上の直交変換なので，その行列式は $+1$ である．Q の特性方程式の係数がすべて実数なので，これは共役な複素固有値と，その積が正となる奇数個の実固有値をもつ．よって，これらの固有値の中に実で正であるものが少なくとも一つ存在する．さらに，Q は G_T 長さを保存しているので，その固有値のすべてのノルムが 1 である．したがって，正の実固有値は実際 1 であるという結論が導ける．したがって，T に G_T 直交し，P に関する左不変である単位ベクトル $U_\perp \in T_pM$ が存在する．

なお，最短閉測地線 σ に沿って平行移動された $U_\perp$ は σ の変分を誘導し，その変分ベクトル $U_\perp(t)$ $(0 \leq t \leq L)$ が σ に沿って $D_T U_\perp = 0$，$G_T(U_\perp(t), U_\perp(t)) = 1$ をみ

たす．このとき，(6.18) の $L''(0)$，(6.13) の指数形式，(4.38) の旗曲率に対して，

$$L''(0) = -\int_0^L K(T, U_\perp)\, dt$$

が成り立つ．

定理の仮定より，M のすべての の旗曲率は正数 λ の下限をもつので，

$$L''(0) \leq -\lambda L < 0$$

である．これより σ は最短測地線ではないということになり，よって矛盾が生じる．そうすると，証明の最初の自明ではない $\alpha \in \pi_1(M)$ の存在の仮定は正しくないことがわかる．したがって，M は単連結である． □

付記A　歴史的なメモ

(S.S. Chern より)

§A-1　古典的な微分幾何学

微分幾何学は微分積分学の自然な発展である．微分することは，曲線の接線を求めることと同じであり，積分することは，面積や体積を調べることと同じである．Newton，Leibniz および Bernoulli 兄弟の仕事等により，微分積分法は幾何学や物理学の研究の有効な道具であることが示された．

曲面論は最初に Euler や Monge により研究された．初めての微分幾何学の本は Monge により著された．

§A-2　リーマン幾何学

Riemann は，1854 年に，その歴史的な大学教員資格の就任講演 (Habilitation) でリーマン幾何学を定義した．2 次元の場合は，1827 年にすでに Gauss により研究され，微分幾何学のコア (核心) となっていた．さらに，アインシュタイン (Einstein) の一般相対性理論 (1915) によりその価値が高められた．

二つのリーマン計量が座標変換によってのみ異なるかどうかを決めることはリーマン幾何学の基本問題である．この問題は 1870 年，同時に異なる方法で E. B. Christoffel と R. Lipschitz によって解決された．

E. B. Christoffel は共変微分の概念を定義し，これをもとにして G. Ricci や T. Levi-Civita はテンソル解析を創設した．テンソル解析は，微分幾何学において基本的な役割を果している．

§A-3　多 様 体

微分幾何学の基本的な研究対象は多様体である．多様体の性質は，座標変換を含んだ形での座標 (座標自身には意味がないが) によって述べられる．それを使いこなすのは難しい．例えば，Einstein は 1908 年の特殊相対性理論から 1915 年の一般相対性理論の発表までに 7 年間を要した．彼自身はこのように長くかかったことについて次のように述べている．「なぜ一般相対性理論をつくるのに 7 年間もかかったのか？　それは，座標が計量的な意味を本質的にもつという考えにとらわれていたからである」(Einstein, 1949).

微分位相幾何学の発展によって，その技術的，哲学的な困難さが克服された．位相多様体の概念はまことに微妙で一言では言い難いが，しかし，微分の導入によって，強力な計算手段が解析的な取り扱いに適用できるようになり，可微分多様体は扱いやすいものになったのである．

1922 年，Elie Cartan によって用いられた外微分法は，重要な解析的手段である (第 3 章参照).

§A-4　大域幾何学

古典的な微分幾何学は局所的である．すなわち，その研究は局所座標近傍に制限されている．近年，大域幾何学，すなわち多様体全体の幾何学に多くの努力が払われている．この方面はおおいに発展してきたが，古典的な幾何学そのものもおもしろい分野であり，多くの重要で，難しい問題があることを注意しておきたい．幾何学は局所的であろうが大域的であろうが一つなのである．

最後に，微分幾何学のいくつかの重要な大域的な結果を述べよう．

1) **特性類**　　これはオイラー特性類の一般化である．さまざまな応用の中で，これに基づいて K 環よりコホモロジー環への環準同形写像が構成される．

2) **ホッジ調和積分**　　Hodge は調和積分を用いて代数多様体のコホモロジーの研究を行った (G. de Rham 1984 を参照)．より一般的に，Eells と Sampson は調和写像という概念を導入した (Eells and Sampson 1964)．これもまた微分幾何学の基本的な概念である．

3) **アティヤ–シンガーの指数定理**　　コンパクトなリーマン面上のリーマン–ロッホの定理は，簡単でありながら数学的に深い結果である．これは，その零

点，極点と曲面の不変量 (この中でもっとも重要なのがオイラー特性類である) を用いて，有理型関数空間を記述するものである．この定理を任意の多様体の場合に一般化できるが，この証明は難しい．これより，積分の形でかける幾何学的な不変量として多様体の楕円作用素の指数を表す，いわゆるアティヤ–シンガーの指数定理が得られる (Berline, Getzler, Vergne 1991 を参照).

付記B　微分幾何学と理論物理学

(S.S. Chern より)

私は，1930 年の秋に清華大学で Zhou Pei-Yuan 先生に初めて出会いました．その年に南開大学を卒業し，清華大学の数学科大学院への入学を申請していたところでした．入試科目の中に力学があり，Zhou 先生がその問題作成と採点の担当者でした．初めて先生にお会いしたとき，「君の試験解答用紙をみたよ！」とおっしゃられました．1937 年頃，私は先生がおられた Southwest Associated 大学に行きました．そのときには先生の電磁気学の授業を聴講しました．

微分幾何学および理論物理学はともに道具として微積分を用いています．前者は幾何学的な現象を研究し，後者は物理学的な現象を研究していますが，後者は自然へのより広い視野をもっております．しかし，すべての物理学的な現象は空間で行われるものですから，微分幾何学は理論物理学の基礎にもなっています．両分野とも演繹法を用いるものの，理論物理学には実験の検証も必要です．幾何学はこのような制約を必要としないので，研究範囲はもっと広いものです．むろん，その論法は数学的に厳密でなければなりません．この特権はつねに数学を新領域へと前進させました．数学的な経験や想像力をもつ人はまったく新しい構想により，佳麗な理論に達することができます．例えば，一般相対性理論が必要としているリーマン幾何学や，ゲージ場理論が必要としているファイバー空間の接続は，その物理学的な応用が認められる以前に，数学者によって研究されていたのでした．数学と物理学における「両者の合流」はじつに不思議な現象だと思われます．

微分幾何学と理論物理学との間の関係をここで簡単に述べることはできませんが，これらが刺激しあったいくつかの研究を紹介します．

---

* この記事は，もともとは，*Papers on Theoretical Physics and Mechanics*, Science Press, 北京 (1982) に中国語で書かれたものである．これは，故 Zhou Pei-Yuan 北京大学教授に謹呈されている．英文への翻訳は Kai S. Lam による．

§B-1　力学と動標構

力学における剛体の運動を記述するために，その剛体に標構を固定し，その標構の運動を記述する．ここで 3 次元空間の直交標構というのは，点 x とその点における互いに直交している三つの単位ベクトル e_i $(i=1,2,3)$ のことである．点 x の位置ベクトルを x とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\sum_i p_i(t)\,e_i,\\ \frac{de_i}{dt}&=\sum_j q_{ij}(t)\,e_j,\qquad 1\le i,j\le 3\end{aligned}\tag{B.1}$$

が成り立つ．ここで，t は時間であり，

$$q_{ij}(t)+q_{ji}(t)=0\tag{B.2}$$

である．関数 $p_i(t)$ および $q_{ij}(t)$ により，剛体とその直交標構の運動が完全に決まる．

力学と空間における曲線論との間に密接な関係がある．すなわち，後者は前者の特殊な場合である．曲面の場合，この関係を明確にするには，二つのパラメーターによる標準標構を考えなければならない．この考え方は，フランスの幾何学者の G.Darboux (1842–1917) によって見事に実現され，彼の主著書「曲面論」(全 4 巻) は微分幾何学の古典となっている．

その後，Elie Cartan (1869–1951) は，動標構をさらに発展させた．一般に，Gauss，Riemann および Cartan は，史上最大の幾何学者として認められている．現在でも，動標構法は微分幾何学において非常に重要な手法である．ここでこれを紹介しよう．

多重パラメーターの直交動標構族の場合，方程式 (B.1) に対する同様の式は，ある積分可能条件をみたす係数をもつ偏微分方程式である．この条件を表現するのに外微分を用いることとしよう．すなわち，(B.1) と (B.2) はそれぞれ

$$dx=\sum_i \omega_i e_i,\qquad de_i=\sum_j \omega_{ij}e_j,\qquad 1\le i,j\le 3,\tag{B.3}$$

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0\tag{B.4}$$

とかける．ここで，ω_i と ω_{ij} はパラメーター空間上の 1 次微分形式である．パラメーター空間が全直交標構の空間となる場合が，もっとも一般的である．この空間は 6 次元空間であり，すなわち，x は三つの座標をもち，x における標

構場も三つの座標をもつ．ある直交標構が与えられたとき，一方から他方へ動く運動は一意である．よって，全直交標構空間は運動群 G に位相同形である．

(B.3) を外微分すれば，

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \qquad d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \qquad 1 \le i,j,k \le 3 \tag{B.5}$$

となる．ここで，“∧” は外積の記号である．これらは，群 G のマウレル–カルタン方程式であり，G のリー代数における乗法方程式の双対方程式である．したがって，力学から動標構へ，そしてリー群の基本方程式への展開は自然であることがわかる．

この方程式はさらに拡張できる．Einstein による一般相対性理論が発表された後，1925 年に Cartan が一般アフィン空間理論とその相対性における応用の論文を出版した (Cartan 1937 を参照)．この論文により，(B.5) の一般化である

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \qquad d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \qquad 1 \le i,j \le 3 \tag{B.6}$$

が成り立つことが示された．ここで，Ω_{ij} は曲率形式とよばれる 2 次微分形式である．この式は，3 次元リーマン幾何学では基本的である．

幾何学でよく用いる方法にテンソル解析がある．その基本的な考え方によると，局所座標の接ベクトルを座標標構として用いることができる．現代的な観点からいえば，この制限のデメリットはこの方法のメリットにも影響する．いずれにせよ，その単純性と明確性のため，テンソル解析は簡単な問題の場合には，不可欠なものである．

§B-2　曲面論，ソリトンとシグマモデル

S を 3 次元ユークリッド空間 E^3 の曲面としよう．点 $x \in S$ に対応する位置ベクトルを x，単位法線ベクトルを ξ としよう．このとき，S の不変量は，2 次微分形式

$$\mathrm{I} = (dx, dx) > 0, \qquad \mathrm{II} = -(dx, d\xi) \tag{B.7}$$

であり，これは第一基本形式，第二基本形式とそれぞれよばれる．前者はつねに正定値である．第二基本形式の固有値 κ_i $(i = 1, 2)$ は S の主曲率とよばれる．この固有値の対称関数

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \\ K &= \kappa_1 \kappa_2 \end{aligned} \tag{B.8}$$

はそれぞれ平均曲率と全曲率 (ガウス曲率) とよばれる．これらの曲率が重要な幾何学的解釈をもつことはよく知られている．例えば，$H = 0$ の曲面は極小曲面である．

平均曲率一定曲面あるいは，全曲率一定曲面は幾何学的には非常におもしろい対象である．x, y, z を E^3 の座標とし，S を方程式

$$z = z(x, y) \tag{B.9}$$

で表すと，方程式

$$H = 一定, \qquad あるいは \qquad K = 一定$$

は，関数 $z(x, y)$ の 2 階偏微分方程式でかけるものである．したがって，定曲率曲面を求めることは，対応する微分方程式の解を求めることと同値である．例えば，極小曲面 $H = 0$ の方程式は

$$\left(1 + {z_y}^2\right) z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + \left(1 + {z_x}^2\right) z_{yy} = 0 \tag{B.10}$$

である．これは楕円型非線形微分方程式である．

また，K が負の一定値の場合も重要である．$K = -1$ と仮定しよう．この曲面上の漸近曲線は，重複しない実曲線である．この二つの曲線のなす角を φ としよう．このとき，

$$\varphi_{ut} = \sin(\varphi) \tag{B.11}$$

が成り立つような S 上のパラメーター u, t がある．これは有名な Sine-Gordon (SG) 方程式である．逆に，SG 方程式の一つの解がわかれば，$K = -1$ 曲面を構成することができる．

上記の議論によると，曲面の変換論は偏微分方程式論への重要な応用なのである．この主張の根拠は次の Bäcklund 定理である．対応する点 $x \in S$ と $x^* \in S^*$ を結ぶ直線が曲面の共通接線となるような曲面 S と S^* の組を考えよう．r をこの点の間の距離とし，ν をこれらの点における法線のなす角としよう．$r = 一定$

と $\nu=$ 一定 のとき，曲面 S と S^* の全曲率は負の定数 $-\sin\nu/r^2$ である．

この定理によると，与えられた全曲率一定曲面に基づいて，同じ一定の全曲率をもつ曲面を構成することができる．いい換えれば，SG 方程式の与えられた解により新しい解を生成できるのである．

ここで，$\varphi(u,t)$ を直線 u 上の波動とし，t を時間とすると，SG 方程式はソリトン解をもつ．上記の変換より，増加したあるいは減少したソリトン数をもつ新たな解が得られる．このように，任意のソリトン数をもつ SG 方程式の解が得られる．

負の全曲率一定曲面は，$(2n-1)$ 次元ユークリッド空間の n 次元定曲率部分多様体に一般化できる．このような部分多様体は SG 方程式の高次元化と考えられる連立偏微分方程式によって決まるものである．Chuu Lian Terng とブラジル出身の数学者 Keti Tenenblat は Bäcklund 定理の高次元版を証明した (Tenenblat and Terng 1980 を参照).

平均曲率一定曲面あるいは極小曲面は理論物理学に応用されている．$f: X \longrightarrow Y$ がリーマン多様体間の写像ならば，エネルギー汎関数 $E(f)$ が定義できる．この汎関数の臨界写像は調和写像とよばれる．この理論は，調和写像と極小部分多様体の一般化であり，調和写像は 2 階楕円型偏微分方程式系をみたすものである．X がコンパクトの場合，調和写像は比較的めずらしい．このような写像の研究は変分原理に由来するものなので，物理学におけるその応用は自然である．

幾何学的に与えられた多様体 X と Y $(\dim X < \dim Y)$ に対して，どのように X を Y に極小部分多様体として埋め込めば，あるいははめ込めばよいのかという問題は非常におもしろい．2 次元球面 $X = S^2$ の場合でも，この問題は自明ではない．この X に対して，E. Calabi (Calabi 1967)，S. S. Chern (Chern 1970)，と L. Barbosa (Barbosa 1975) は，$Y = S^n$ (n 次元球面) の場合を研究した．1980 年に，物理学者 A. M. Din と W. J. Zarkrzewski (Din and Zarkrzewski 1980) は，いわゆるシグマモデルにおけるすべての調和写像 $f: S^2 \longrightarrow P_n(\mathbb{C})$ (n 次元複素射影空間) を決定した．Y が他の空間の場合，例えば $SU(n)$, $Q_n(\mathbb{C})$ (複素超 2 次曲面)，あるいは $G(n,k)$ (グラスマン多様体) の場合は，極小 2 次元球面独自の知識が多く求められる．極小 2 次元球面の問題はまだ未解決である[1]．

極小曲面の数学的な解析では，いわゆる強「正則」性が問題になる．すなわち，

1)　この問題は Jon Wolfson によって最近解決された (Wolfson 1988 を参照).

ある境界条件のもとに，正則あるいは滑らかな極小曲面が存在するかという問題である．この重要な性質は幾何学において多くの応用をもつ．一般相対性理論では，R. Schoen と S. T. Yau はいわゆる「正質量予想」を証明した (Schoen and Yau 1979).

§B-3　ゲージ場理論

ゲージ場理論は，数学的にはベクトル束の概念に基づいている．この数学的な概念の展開はきわめて自然である．ニュートン力学の対象は関数 $y = f(x)$ である．ベクトル値 m 変数の関数を得るために，これを独立な変数が m 次元空間上の座標である場合に一般化しよう．この関数を写像 $f : X \longrightarrow Y$ で表す．ここで，$X = \mathbb{R}^m$，$Y = \mathbb{R}^n$ である．このような写像は，“グラフ” $F : X \longrightarrow X \times Y$，$F(x) = (x, f(x))$, $x \in X$ で表すことができる．写像 F の像は二つの位相空間の積である．$\pi(x, y) = x$ $(x \in X, y \in Y)$ が成り立つような $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ に対して，F は条件 $\pi \circ F(x) = x$ をみたしている．

ベクトル束は，現代数学の非常に重要な概念である．その中心となっているアイデアは，$X \times Y$ を局所的には積である空間 E と置き換えることができることである．すなわち，任意の点 $x \in X$ における近傍 U をとる．このとき $\pi^{-1}(U)$ が $U \times Y$ に位相同形であるような空間 E と写像 $\pi : E \longrightarrow X$ が存在する．

ところで，局所積構造をもつ空間は必ず大域的な積構造をもつのか？　すなわち，上記の空間 E は必ず $X \times Y$ に位相同形であるのか？　この問題は数学的に非常に魅力的であり，その解はいわゆる特性類に基づくものである (答えは，E が必ずしも $X \times Y$ ではないのである).

ベクトル束 $\pi : E \longrightarrow X$ を考えよう．条件 $\pi \circ F(x) = x$ $(x \in X)$ をみたす写像 $F : X \longrightarrow E$ を切断という．切断上で微分を行うには接続が必要である．接続より，微分の非可換性を測る曲率が得られる．

ゲージ場は，ちょうどベクトル束の接続である．物理学者は，これをゲージポテンシャル，曲率を場の強度とよんでいる．これは，微分幾何学と理論物理学との間にまたがるすばらしい関係の見本である．

私の理解では，物理学の基礎理論のすべては最終的に「量子化」されていくと思われる．数学的には，これに対応する無限次元空間と離散現象を研究する必要があろう．

§B-4　結　　論

一般相対性理論とリーマン幾何学との関係はきわめて重要である．相対性理論がなければ，リーマン幾何学は数学者にこれほどの興味をもたせるはずがなかった．C. N. Yang は数学と物理学との間の関係を図形で表した (Yang 1980) が，この小論の締めくくりとして別の形の図をあげておこう．

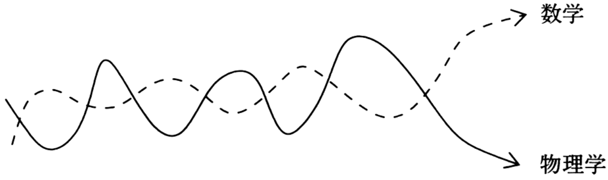


図 15

関連図書

[1] L. Auslander and R. E. Mackenzie, *Introduction to Differential Manifolds* (McGraw Hill, New York, 1963).

[2] D. Bao and S. S. Chern, *On a Notable Connection in Finsler Geometry*, Houston Journal of Mathematics, Vol. **19**, No. 1 (1993), 135–180.

[3] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, ed., *Finsler Geometry (Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Finsler Geometry, July 16–20, 1995, Seattle, Washington)*, Contemporary Mathematics, Vol. **196**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996).

[4] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Vol. **200** of Graduate Texts in Mathematics (Springer-Verlag, New York, 2000).

[5] J. L. M. Barbosa, *On Minimal Immersions of S^2 into S^{2m}*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **210**, (1975), 75–106

[6] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Oparators*, Vol. **298** of Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften (Springer-Verlag, New York, 1991).

[7] W. H. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (Academic Press, New York, 1975).

[8] E. Calabi, *Minimal Immersions of Surfaces in Euclidean Spaces*, J. of Differential Geom., Vol. **1** (1967), 111–125.

[9] E. Cartan, *La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géométrie Differentielle Traitées par la Méthode du Repére Mobile* (Gauthier-Villars, Paris, 1937).

[10] E. Cartan, *Les Systémes Differentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques* (Hermann, Paris, 1945).

[11] (a) S. S. Chern, *On a Theorem of Algebra and its Geometric Application*, J. Indian Math. Soc., Vol. **9** (1944), 29–36.

[12] (b) S. S. Chern, *A simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*, Annals of Math., Vol. **45** (1944), 747–752. Reprinted in *Shiing-Shen Chern Selected Papers*(Springer-Verlag, New York,

1978), 83–88.

[13] S. S. Chern, *Characteristic Classes of Hermitian Manifolds*, Annals of Math., Vol. **47**, No. 1 (1946), 85–121. Reprinted in *Shiing-Shen Chern Selected Papers* (Springer-Verlag, New York, 1978), 101–137.

[14] S. S. Chern, *Local Equivalence and Euclidean Connections in Finsler Spaces*, Science Reports Tsing Hua University, Vol. **5** (1948), 95–121. Reprinted in *Shiing-Shen Chern Selected Papers, Vol. II* (Springer-Verlag, New York, 1989), 194–212.

[15] S. S. Chern, *Differentiable Manifolds* (mimeographed), University of Chicago, (1953), 166pp.

[16] S. S. Chern, *An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. **6** (1955), 771–782.

[17] (a) S. S. Chern, *Curves and Surfaces in Euclidean Space*, in *Global Geometry and Analysis*, MAA Studies in Mathematics, Vol. **4**, ed. by S. S. Chern (The Mathematical Association of America, Prentice Hall, Inc., Inglewood Cliffs, 1967), 16–56.

[18] (b) S. S. Chern, *Complex Manifolds Without Potential Theory* (D. Van Nostrand, Princeton, 1967); second edition, revised (Springer-Verlag, New York, 1979).

[19] S. S. Chern, *On the Minimal Immersions of the 2-Sphere in a Space of Constant Curvature*, in *Problems in Analysis* (Princeton Univeristy Press, Princeton, 1970) 27–40. Reprinted in *Shiing-Shen Chern Selected Papers, Vol. III* (Springer-Verlag, New York, 1989), 141–154.

[20] (a) S. S. Chern, *Finsler Geometry is just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction*, Notices of the AMS (Septemeber 1996) 959–963.

[21] (b) S. S. Chern, *Riemannian Geometry as a Special Case of Finsler Geometry*, Contemporary Mathematics, Vol. **196** (1996), 51–58.

[22] (c) S. S. Chern, *Remarks on Hilbert's 23rd Problem*, The Mathematical Intelligencer, Vol. **18**, No. 4 (1996), 7–8.

[23] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups* (Princeton University Press, Princeton, 1946).

[24] G. de Rham, *Differentiable Manifolds*, Vol. **266** of Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften (Springer-Verlag, New York, 1984).

[25] A. M. Din and W. J. Zakrzewski, *General Classical Solutions in the* CP^{n-1} *Model*, Nuclear Physics **B174** (1980), 397–406.

[26] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, translated by F. Flaherty (Birkhauser, Boston, 1992).

[27] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds* (Clarendon Press, Oxford, New York, 1991).

[28] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic Mappings into Riemannian Manifolds*, Amer. J. Math., Vol. **86** (1964), 109–160.

[29] A. Einstein, *Autobiographed Notes*, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, edited by P. A. Schilpp (Open Court, La Salle, Ill., 1949), Vol. **1**, p. 67.

[30] P. A. Griffiths, *On Cartan's Mathod of Lie Groups and Moving Frames as applied to Uniqueness and Existence Questions in Differential Geometry*, Duke Math. J., Vol. **14** (1974), 775–814.

[31] N. J. Hicks, *Notes on Differential Geometry* (D. Van Nostrand, Princeton, 1965).

[32] W. Hurewicz, *Lectures in Ordinary Differential Equations* (M. I. T. Press, Cambridge, 1966).

[33] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vols. I and II (Interscience, New York, 1963 and 1969).

[34] J. Milnor, *On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere*, Annals of Math., Vol. **64** (1956), 394–405.

[35] J. Milnor, *Morse Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1963). [邦訳：「モース理論」数学叢書，志賀浩二訳，吉岡書店，2004]

[36] J. R. Munkres, *Topology, A First Course* (Prentice-Hall, Inc., Inglewood Cliffs, 1975).

[37] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds*, Annals of Math., Vol. **65** (1957), 391–404.

[38] K. Nomizu, *Lie Groups and Differential Geometry*, Publ. Math. Soc. of Japan, No. 2 (1956).

[39] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces* (Springer-Verlag, Berlin, 1959).

[40] R. Schoen and S. T. Yau, *On the Proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity*, Comm. Math. Phys., Vol. **65** (1969), 45–76.

[41] I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics (Springer-Verlag, New York, 1976). [邦訳：「トポロジーと幾何学入門」，赤 攝也 監訳／松江広文・一楽重雄訳，培風館，1995]

[42] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vols. I–V (Publish or Perish, Inc., Boston, 1979).

[43] N. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles* (Princeton University Press, Princeton, 1951). [邦訳：「ファイバー束のトポロジー」数学叢書 26，大口邦雄訳，吉岡書店，1995]

[44] K. Tenenblat and C. L. Terng, *Bäcklund's Theorem for n-Dimensional Submanifolds of* $\mathbb{R}^{2n-1}$, Annals of Math., Vol. **111** (1980), 477–490.

[45] W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. **1**, edited by Silvio Levy (Princeton University Press, Princeton, 1997). [邦訳：「3 次元幾何学とトポロジー」，小島定吉 監訳，培風館，1999]

[46] J. G. Wolfson, *Harmonic Sequences and Harmonic Maps of Surfaces into Complex Grassmann Manifolds*, J. of Differential Geom., Vol. **27**, No. 1

(1988), 161–178.

[47] C. N. Yang, *Fiber Bundles and the Physics of the Magnetic Monopole*, in *The Chern Symposium 1979* (Springer-Verlag, New York, 1980), 247–253.

訳者追加文献

[48] M. Abate and G. Patrizio, *Finsler Metrics. A Global Approach*, Lecture Notes 1591, (Springer, 1994).

[49] T. Aikou, *Finsler Geometry on Complex Vector Bundles*, A Sampler of Riemann-Finsler Geometry, Edi. Bao, Bryant, Chern and Shen, Cambridge, MSRI Publication Vol.50, (2004), 83–105.

[50] P.L. Antonelli(Edited), *Handbook of Finsler Geometry*, Vol. **I**, **II**, (Kluwer Academic Publishers, 2003).

[51] D. Bao, C. Robles and Z. Shen, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. of Differential Geom., 66 (2004), 377–435

[52] R. L. Bryant. *Some Remarks on Finsler manifolds with constant flag curvatures*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 28, No.2 (2002), 221–262.

[53] P. Foulon, *Curvature and Global Rigidity in Finsler Manifolds*, Houston Journal of Mathematics, Vol.28, No.2 (2002), 263–292.

[54] Z. Shen, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, (Kluwer Academic Publishers, 2001).

[55] M. Matsumoto, *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, (Kaiseisha Press, Otsushi, 1986).

[56] P.L. Antonelli, R.S.Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, (Kluwer Academic Publishers, 1993).

[57] 宮岡礼子・小谷元子 編, 21 世紀の数学—幾何学の未踏峰 (日本評論社, 2004).

[58] 松本誠, 計量微分幾何学 (裳華房, 1975).

訳者あとがき

本書はフィンスラー幾何学の理論 (Chern 流) が載っているきわめて特色のある本であり，Chern 教授のアイデアを用いた引き戻し束に基づくフィンスラー幾何学の理論が展開されている．これに対して，故 松本誠教授，P. Dazord 氏らのフィンスラー束に基づいた大域理論もよく知られている [55]．この違いは次のところにあるといえよう．松本流のフィンスラー束の共変微分は

$$D: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

で考えるのに対して，チャーン流の共変微分は

$$D: \Gamma(TM) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

で考えるのである．ここで $\Gamma(M)$ は M 上の滑らかな切断のベクトルの集合である．つまり Chern 流のほうが計算しやすいということであるが，得られる幾何学的な結果としては同じである．また本書のチャーン接続は，古典的フィンスラー接続の一つであるルンド接続と同じであることが M. Anastasiei 氏により証明された [3]．

原書が出版されてから現在までの間にフィンスラー幾何学の研究が進んで，多くの新しい結果が発表されている．これらの状況と本書には掲載されていないフィンスラー幾何学研究の主な結果についてここで簡単に紹介したい．

R.Bryant 氏は正の一定旗曲率のフィンスラー多様体に関する四つの重要な事実を示した [52]．それは以下の通りである．

1) フィンスラー多様体の測地線多様体は標準ケーラー構造をもつ．
2) CP^n 上のある超曲面を用いると，n 次元正の一定旗曲率フィンスラー多様体を自然に構成できる．
3) S^2 上の任意の正のガウス曲率 Zoll 計量を用いると，S^2 上の大域的正の一定旗曲率をもつフィンスラー構造を構成できる．

4) 正の一定旗曲率フィンスラー構造より，$2n$ 次元多様体上の特殊な捩率 0 の $S^1 \cdot GL(n, R)$ 構造が得られる．この群は $2n$ 次元の捩率 0 のアファイン接続のホロノミー群である．このようなホロノミー群は従来のホロノミー群研究からは得られないものである．

次に，本書では取り上げていないテーマに複素フィンスラー多様体がある．この分野では鹿児島大学の愛甲正氏 [49]，M.Abate 氏, G.Patrizio 氏 [48] らがおられる．そこでは複素フィンスラーベクトル束が定義され，これに関連するケーラーファイブレーション，ボット接続，射影フィンスラー束等が研究されている．特に愛甲氏は，ケーラー多様体 $P(E)$ は負曲率フィンスラーベクトル束と正則直線束のテンソル積を除いて同値であることを示した [49]．ここで E はコンパクトなケーラー多様体上の正則ベクトル束で，$P(E)$ は E の射影化束である．本書で取り上げている特殊フィンスラー空間は，リーマン空間，ベアバルド空間，局所ミンコウスキー空間であるが，これ以外にもランズベルグ空間，(α, β) 空間等がある [56]．

ランズベルグ空間とは，ベアバルド空間の条件をゆるめた次の条件

$$\dot{A} = 0, \qquad \dot{A} := \nabla_{\widehat{e}_n} A$$

を満足するものをいう．ここで ∇ はチャーン接続に関する共変微分である．$\widehat{e}_n$ は第 8 章の式 (3.57), (3.58) である．ベアバルド空間ならばランズベルグ空間であることは容易にわかるが，この逆問題「ランズベルグ空間ではあるがベアバルド空間ではないという空間の計量基本関数の具体的な実例を求めよ」という問題を松本誠教授が提起している [57]．ちなみにランズベルグ空間の場合，ガウス–ボンネの定理のフィンスラー版は D.Bao 氏と Chern 教授によって証明された [4]．

フィンスラー計量 L が α, β に関して斉 1 次であるとき (α, β) 計量といい，(α, β) 計量をもつフィンスラー空間は (α, β) 空間とよばれる [50] [56]．ここで $\alpha = \sqrt{a_{ij}(u) X^i X^j}$ (リーマン計量)，$\beta = b_i(u) X^i$ (1 次微分形式) である．特に $L = \alpha + \beta$ はランダース計量といい，ランダース計量をもつフィンスラー空間はランダース空間とよばれる [56]．リーマン計量 α で測った β のノルムの大きさが 1 より小さい場合，ランダース計量は正定値であることが示されている [4] [56]．すなわち，そのインディカトリックス (フィンスラー単位球) が凸集合であることが必要十分条件である．ランダース空間はリーマン空間のわずかな一般化である．すなわち，そのわずかなずれがないときにはリーマン空間

になるので，このランダース空間は古典的なリーマン幾何学に最も近いフィンスラー計量をもつといえる．したがって，ランダース空間はリーマン–フィンスラー幾何学の代表的なモデルの一つとなっており，多くの研究者がその大域的・局所的性質を研究している．最近 D.Bao，C.Robles，Z.Shen 諸氏の論文でツェルメロの航行術問題 (Zermero navigation problem) から出発して，30 年にわたって多くの研究者が取り組んだランダース定曲率空間であるための必要十分条件とその分類問題が解決された [51]．その条件は良く知られたリーマン定曲率空間にキリング形式が付加されるという式で表されている．

さらに P.Foulon 氏は，測地線と対称空間上へのフィンスラー構造を研究している [53]．P.Foulon 氏は第 8 章の条件 (1.2) をみたすフィンスラー多様体に対して大域的に強剛性が成り立つ条件を求めている．つまりその条件を満足するフィンスラー多様体がリーマン多様体になるための必要十分条件を求めている．

現在 フィンスラー幾何学は世界中で研究されており，無視できない微分幾何学の分野になっている．しかしながら現在までに日本語で書かれたフィンスラー幾何学の書物はきわめて少ない [58]．そのために本書はフィンスラー幾何学の入門書として，研究者や教員や大学院生や学部生などにお勧めできるのである．

最後に，次の方々の協力なしには決して本書の翻訳はできなかった．本書の翻訳を薦めていただいた首都大学東京 (旧 東京都立大学) の大仁田義裕教授，校正などで尽力を賜った北海道教育大学の長谷川和泉教授，旭川医科大学の山内一也教授，さらに翻訳原稿を LaTeX に入力して下さったサバウ・ガビ氏に深謝する次第である．

2005 年 5 月

島田英夫・サバウ バシレ ソリン

索　引

記　号

あ　行

か　行

さ　行

た 行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ

訳者略歴

島田英夫
しまだひでお

1967年　北海道大学理学部数学科卒
1985年　コシュート大学（デブレェツェン，ハンガリー）より Ph. D.
現　在　北海道東海大学教授（Ph. D.）

サバウ バシレ ソリン
Sabau Vasile Sorin

1991年　バベシュ・ボヤイ（Babes–Bolyai）大学（ルーマニア）理学部数学科卒
2001年　東京都立大学大学院理学研究科数学専攻博士課程修了
現　在　北海道東海大学講師（理学博士）

2005年 9月 8日　初版発行

微分幾何学講義
リーマン・フィンスラー幾何学入門

原著者　S. S. チャーン
　　　　W.H. チェン
　　　　K.S. ラム
訳　者　島田英夫
　　　　V. S. サバウ
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102-8260
電話 (03)3262-5256（代表）・振替 00140-7-44725

D.T.P. アベリー・平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00345-X C3041